

Unité et dimension d'une grandeur physique

I. Différence entre unité et dimension d'une grandeur physique

Bien que les deux soient liées, il importe de faire la distinction entre la **dimension** d'une grandeur physique et son **unité**. En effet, deux grandeurs de même espèce ont même dimension mais peuvent avoir des unités différentes.

Par exemple une distance a pour dimension une longueur mais peut s'exprimer dans différentes unités : mètre, mille, parsec (échelle astronomique), angström (échelle atomique).

Une grandeur purement numérique, comme le rapport de deux grandeurs de même dimension, est dite **sans dimension**.

Par exemple l'angle plan, défini comme le rapport entre la longueur d'un arc de cercle et le rayon du cercle, est sans dimension bien qu'ayant une unité : le radian ou le degré.

La dimension d'une grandeur physique renseigne sur sa nature. C'est une caractéristique plus générale que son unité dont le choix est adapté à l'échelle du phénomène étudié.

II. Système international d'unités

Le **Système international d'unités** (abrégé en **SI**) est le système d'unités le plus largement employé au monde. C'est la conférence générale des poids et mesures qui décide de son évolution, tous les quatre ans.

Le Système international compte sept unités de base qui correspondent à **sept grandeurs fondamentales différentes** (voir le tableau ci-dessous et le document 1 de l'annexe).

grandeur	nom de l'unité de base SI	symbole
masse	kilogramme	kg
temps	seconde	s
longueur	mètre	m
intensité de courant électrique	ampère	A
température thermodynamique	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

De ces **unités de base** on déduit des **unités dérivées**, par exemple l'unité de vitesse du système international, le mètre par seconde (voir document 3 de l'annexe).

La valeur de l'unité n'est pas toujours adaptée à l'ordre de grandeur du résultat numérique d'une mesure ou d'un calcul. On peut alors, pour exprimer ce résultat, utiliser un **multiple ou sous-multiple** de l'unité (voir document 2 de l'annexe).

III. Analyse dimensionnelle (équation aux dimensions et homogénéité)

1. Equation aux dimensions

La dimension de n'importe quelle grandeur sera exprimée en fonction des dimensions des sept grandeurs de base auxquelles sont associés les symboles dimensionnels suivant :

dimension	symbole	dimension	symbole	dimension	symbole	dimension	symbole
masse	M	temps	T	intensité électrique	I	quantité de matière	N
longueur	L			température	Θ	intensité lumineuse	J

L'équation aux dimensions d'une grandeur G est l'écriture de sa dimension, notée $[G]$, en fonction des sept dimensions de base précédemment définies : $[G] = L^a M^b T^c I^d J^e \Theta^f N^g$ où a, b, c, d, e, f, g sont des nombres sans dimension. On peut ainsi obtenir directement l'unité de G en fonction des unités des grandeurs de base (voir document 3 de l'annexe).

2. Homogénéité des relations

Une relation physique n'a de sens que si les deux expressions de part et d'autre de l'égalité ainsi que chaque terme additif de ces expressions ont même dimension. La relation est dite **homogène**.

On devra toujours vérifier l'homogénéité des relations :

- Les termes d'une somme ou d'une différence doivent avoir la même dimension.
- Les deux termes d'une égalité doivent avoir la même dimension.
- Les fonctions mathématiques (sin, cos, tan, exp, ln ...) ainsi que leurs arguments sont sans dimension.

L'analyse dimensionnelle est un outil puissant pour détecter une erreur : **une relation non homogène est obligatoirement fautive.**

- **Définitions des unités de base du système international** (document 1)

Extrait du site www.bipm.org (Bureau International des Poids et Mesures)

Kilogramme : Le kilogramme est égal à la masse du prototype international du kilogramme (1901) .

Seconde : La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 (1967) .

Mètre : Le mètre est la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant une durée de 1/299 792 458 seconde (1983) .

Ampère : L'ampère est l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu entre deux conducteurs parallèles rectilignes , de longueur infinie, de section circulaire négligeable, et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre de longueur . (1946)

Kelvin : Le kelvin est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau (1967)

Mole : La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.

Lorsque l'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou groupements spécifiés de telles particules (1971) .

Candela : La candela est l'intensité lumineuse , dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian (1979)

Unités complémentaires (unités dérivées sans dimension)

Radian : Le radian est l'angle compris entre deux rayons qui interceptent sur un cercle un arc de longueur égale à celle du rayon . (1965)

Stéradian : Le stéradian est l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère . (1965)

- **Multiples des unités** (document 2)

facteur	préfixe	symbole		facteur	préfixe	symbole
10	déca	da		10^{-1}	déci	d
10^2	hecto	h		10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k		10^{-3}	milli	m
10^6	méga	M		10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G		10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra	T		10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P		10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E		10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z		10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y		10^{-24}	yocto	y

• Unités dérivées - Equation aux dimensions (document 3)

grandeur	équation de définition ou relation	équation aux dimensions	unité S.I.
longueur aire volume	grandeur de base $A = \ell^2$ $V = \ell^3$	$[\ell] = L$ $[A] = L^2$ $[V] = L^3$	m (mètre) m^2 m^3
temps vitesse accélération	grandeur de base $v = \ell/t$ $a = v/t$	$[t] = T$ $[v] = LT^{-1}$ $[a] = LT^{-2}$	s (seconde) $m.s^{-1}$ $m.s^{-2}$
masse masse volumique quantité de mouvement moment cinétique force travail puissance pression constante de gravitation	grandeur de base $\rho = m/V$ $p = m.v$ $L = m.v.r$ $F = m.a$ $W = F.\ell$ $\Phi = W/t$ $P = F/A$ $F = G.m.m'/r^2$	$[m] = M$ $[\rho] = ML^{-3}$ $[p] = MLT^{-1}$ $[L] = ML^2T^{-1}$ $[F] = MLT^{-2}$ $[W] = ML^2T^{-2}$ $[\Phi] = ML^2T^{-3}$ $[P] = ML^{-1}T^{-2}$ $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$	kg (kilogramme) $kg.m^{-3}$ $kg.m.s^{-1}$ $kg.m^2.s^{-1}$ N (newton) J (joule) W (watt) Pa (pascal) $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
courant électrique charge électrique différence de potentiel champ électrique résistance électrique conductance électrique capacité permittivité champ magnétique perméabilité	grandeur de base $q = I.t$ $U = \Phi/I = E.\ell$ $F = q.E$ $R = U/I$ $G = 1/R$ $C = q/U$ $F = qq'/4\pi\epsilon_0 r^2$ $F = B.I.\ell$ $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$	$[I] = I$ $[Q] = IT$ $[U] = ML^2T^{-3}I^{-1}$ $[E] = MLT^{-3}I^{-1}$ $[R] = ML^2T^{-3}I^{-2}$ $[G] = M^{-1}L^{-2}T^3I^2$ $[C] = M^{-1}L^{-2}T^4I^2$ $[\epsilon_0] = M^{-1}L^{-3}T^4I^2$ $[B] = MT^{-2}I^{-1}$ $[\mu_0] = MLT^{-2}I^{-2}$	A (ampère) C (coulomb) V (volt) $V.m^{-1}$ Ω (ohm) S (siemens) F (farad) $F.m^{-1}$ T (tesla) $N.A^{-2}$