ETUDE D'UN CIRCUIT SOUMIS A UN ECHELON DE TENSION (RC, RL, RLC série)

Cadre d'étude :

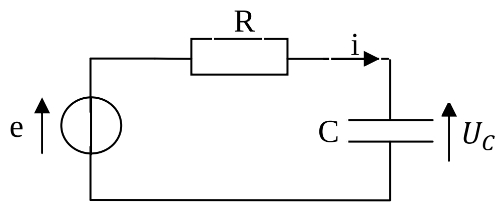
Dans ce chapitre, on étudie les circuits linéaires RC, RL et RLC série soumis à un échelon de tension, c'est à dire au **régime transitoire** de ces circuits entre deux régimes continus. Pour cette étude en **régime variable**, on reste dans le cadre de l'**ARQS**, à savoir qu'on néglige tout phénomène de propagation.

A. Circuits du premier ordre

I. Circuit RC série

1) Equation différentielle

Considérons un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice e(t).



Dans ce circuit **la tension U_C aux bornes du condensateur** vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

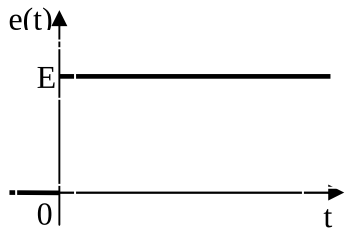
$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{\tau} = \frac{e}{\tau}} \quad \text{avec } \boxed{\tau = RC}$$

τ représente **la constante du temps** du circuit.

2) Charge d'un condensateur

On allume la source de tension à l'instant initial :
- $t < 0, e(t) = 0$
- $t > 0, e(t) = E$

Le condensateur est initialement déchargé.



Pour $t > 0$**,** le condensateur est soumis à un échelon de tension montant et l'équation différentielle devient : $\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}}$ (second membre constant non nul).

La solution s'écrit $U_C(t) = U_{CH}(t) + U_{CP}$ avec :

- $U_{CH}(t)$ solution générale de l'équation sans second membre (ou homogène) $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{\tau} = 0$: $U_{CH}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$**,** A étant une constante d'intégration à déterminer à partir des conditions initiales.

- U_{CP} solution particulière de l'équation avec second membre : $U_{CP} = E$**.**

$$\text{Ainsi } \boxed{U_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E}$$

Détermination de la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales :

Pour $\boldsymbol{t} < 0$, le générateur est éteint.
Le condensateur est déchargé : $q = 0$ d'où $\boldsymbol{U_C = \frac{q}{C} = 0}$.
La tension aux bornes du condensateur est constante, le régime est donc continu et le condensateur se comporte comme un coupe-circuit (voir Chapitre 2) d'où $\boldsymbol{i = 0}$.

Pour $\boldsymbol{t > 0}$, le générateur est allumé.
Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $\boldsymbol{U_C(t = 0^-) = U_C(t = 0^+)}$.
$U_C(t = 0^-) = 0$ (obtenue à $t < 0$) et $U_C(t = 0^+) = A + E$ (obtenue à partir de la solution précédente valable pour $t > 0$) soit $\boxed{\boldsymbol{A = -E}}$.

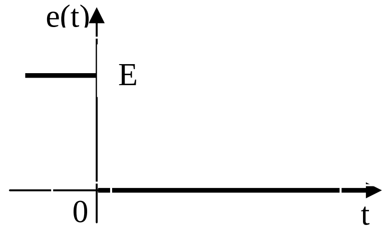
- En conclusion la tension aux bornes du condensateur initialement déchargé ($\boldsymbol{U_C(t < 0) = 0}$) et soumis à un échelon de tension montant s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{U_C(t \geq 0) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}}$$

A l'aide de la relation courant-tension du condensateur $\mathrm{i} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{dU_C}}{\mathrm{dt}}$, on obtient l'expression de l'intensité traversant le circuit : $\boxed{\boldsymbol{i(t > 0) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}}$

Contrairement à la tension aux bornes du condensateur, l'intensité n'est pas continue à l'allumage de la source : $\boldsymbol{i(t = 0^-) = 0 \neq i(t = 0^+) = \frac{E}{R}}$.

3) Décharge d'un condensateur



On éteint la source de tension à l'instant initial :
- $t < 0, e(t) = E$
- $t > 0, e(t) = 0$

Le condensateur est initialement chargé.

Pour $\boldsymbol{t} > 0$, le condensateur est soumis à un échelon de tension descendant et l'équation différentielle devient : $\boxed{\boldsymbol{\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{\tau} = 0}}$ (second membre nul : régime libre - sans excitation)
La solution s'écrit $\boxed{\boldsymbol{U_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}}}$ et A s'obtient comme précédemment à l'aide des conditions initiales.

<u>Détermination de la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales</u> :

Pour $\boldsymbol{t} < 0$, le générateur est allumé.
Le condensateur est chargé : $\boldsymbol{U_C = E}$.
La tension aux bornes du condensateur est constante, le régime est donc continu et le condensateur se comporte comme un coupe-circuit (voir Chapitre 2) d'où $\boldsymbol{i = 0}$.

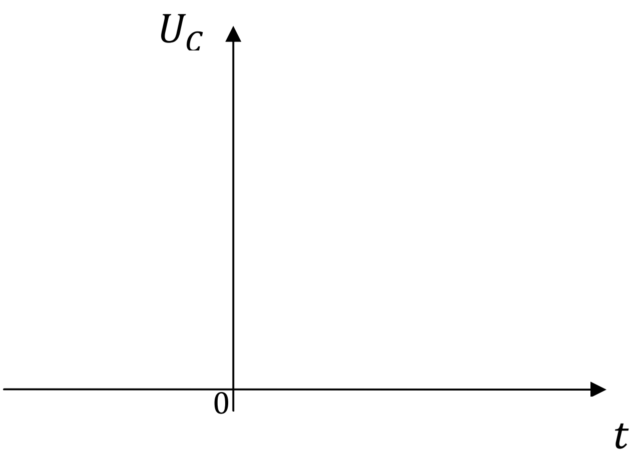
Pour $\boldsymbol{t > 0}$, le générateur est éteint.
<u>Par continuité de la tension aux bornes du condensateur</u> : $\boldsymbol{U_C(t = 0^-) = U_C(t = 0^+)}$.
$U_C(t = 0^-) = E$ (obtenue à $t < 0$) et $U_C(t = 0^+) = A$(obtenue à partir de la solution précédente valable pour $t > 0$) soit $\boxed{\boldsymbol{A = E}}$.

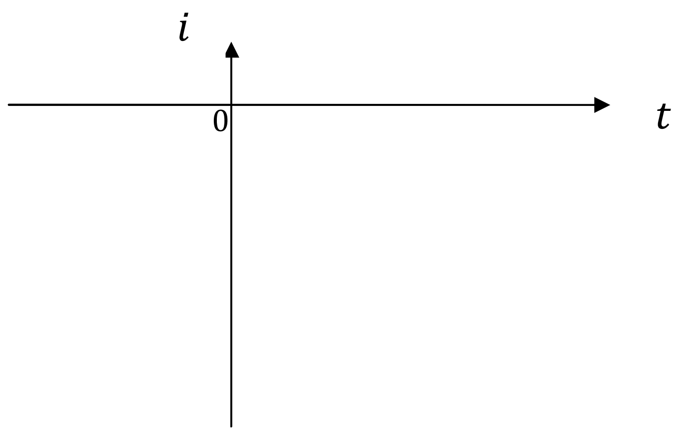
- En conclusion la tension aux bornes du condensateur initialement chargé ($\boldsymbol{U_C(t < 0) = E}$) et soumis à un échelon de tension descendant s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{U_C(t \geq 0) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}}}$$

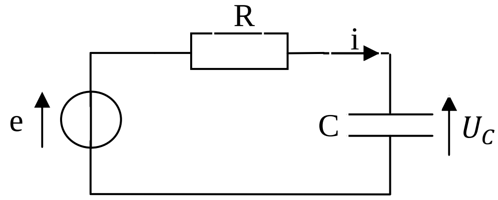
A l'aide de la relation courant-tension du condensateur $\mathrm{i = C\frac{dU_C}{dt}}$, on obtient l'expression de l'intensité traversant le circuit : $\boxed{\boldsymbol{i(t > 0) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}}$

Contrairement à la tension aux bornes du condensateur, l'intensité n'est pas continue à l'extinction de la source : $\boldsymbol{i(t = 0^-) = 0 \neq i(t = 0^+) = -\frac{E}{R}}$.





4) Bilan énergétique



Bilan de puissance ($\boldsymbol{P}$)

En multipliant la loi des mailles par l'intensité i, on obtient le bilan de puissance suivant $ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}C{U_C}^2)$ avec :

- $P_{f,e} = ei$: puissance fournie (convention générateur) par le générateur.
- $P_{r,R} = Ri^2$: puissance reçue (convention récepteur) par le résistor.
- $P_{r,C} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}C{U_C}^2\right) = \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_C)$: puissance reçue (convention récepteur) par le condensateur et stockée sous forme d'énergie électrostatique $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}C{U_C}^2$.

Bilan d'énergie ($\boldsymbol{W = \int Pdt}$)

- *Lors de la charge* ($e = E$), l'énergie (ou le travail) fournie par le générateur ($W_{f,e}$) est en partie emmagasinée dans le condensateur ($W_{r,C}$) et en partie dissipée par effet Joule dans la résistance ($W_{r,R}$). Or $W_{r,C} = \frac{1}{2}CE^2$ et $W_{f,e} = CE^2$. Ainsi d'après le bilan d'énergie $W_{f,e} = W_{r,C} + W_{r,R}$ il vient $\boldsymbol{W_{r,R} = W_{r,C}}$ **: l'énergie délivrée par l'alimentation est équitablement répartie entre la résistance et le condensateur (comportement récepteur).**

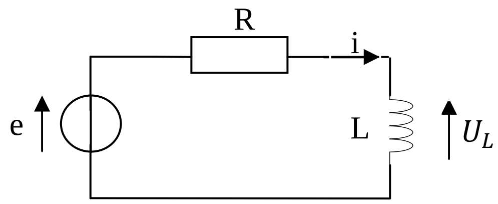
- *Lors de la décharge* ($e = 0$), le bilan d'énergie devient $W_{f,e} = W_{r,C} + W_{r,R} = 0$ soit $\boldsymbol{W_{r,R} = -W_{r,C}} = \frac{1}{2}CE^2$ **: le condensateur restitue l'énergie stockée lors de la charge (comportement générateur) qui est dissipée par effet Joule dans la résistance.**

Remarque : La résistance se comporte dans tous les cas comme un récepteur $W_{r,R} > 0$.

II. Circuit RL série

1) Equation différentielle

Considérons un circuit RL série alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice e(t).

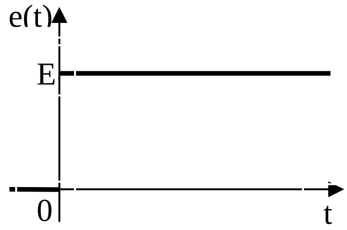


L'**intensité i traversant le circuit** vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{e}{L}}} \text{ avec } \boxed{\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}}$$

τ représente **la constante du temps** du circuit.

2) Etablissement du courant dans une bobine



On allume la source de tension à l'instant initial :
- $t < 0, e(t) = 0$
- $t > 0, e(t) = E$
Le courant est initialement nul.

Pour $\boldsymbol{t > 0}$**,** la bobine est soumise à un échelon de tension montant et l'équation différentielle devient : $\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}}$ (second membre constant non nul).

La solution s'écrit $\boldsymbol{i(t) = i_H(t) + i_P}$ avec :

- $\boldsymbol{i_H(t)}$ solution générale de l'équation sans second membre (ou homogène) $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$: $\boldsymbol{i_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$**,** A étant une constante d'intégration à déterminer à partir des conditions initiales.

- $\boldsymbol{i_P}$ solution particulière de l'équation avec second membre : $\boldsymbol{i_P = \frac{E}{R}}$**.**

$$\text{Ainsi } \boxed{\boldsymbol{i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}}}$$

<u>Détermination de la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales</u> :

Pour $\boldsymbol{t} < 0$, le générateur est éteint.
Le courant est nul : $\boldsymbol{i = 0}$.
L'intensité est constante, le régime est donc continu et la bobine se comporte comme un court-circuit (voir Chapitre 2) d'où $\boldsymbol{U_L = 0}$.

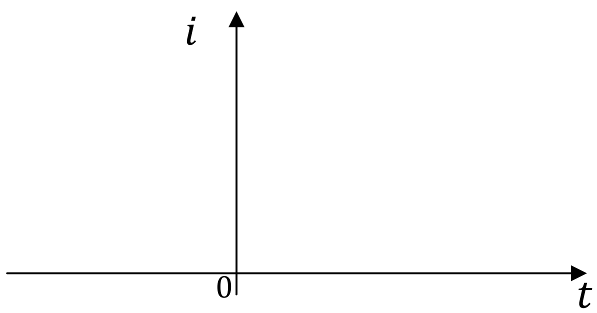
Pour $\boldsymbol{t > 0}$, le générateur est allumé.
<u>Par continuité de l'intensité traversant une bobine</u> : $\boldsymbol{i(t = 0^-) = i(t = 0^+)}$**.**
$i(t = 0^-) = 0$ (obtenue à $t < 0$) et $i(t = 0^+) = A + \frac{E}{R}$ (obtenue à partir de la solution précédente valable pour $t > 0$) soit $\boxed{\boldsymbol{A = -\frac{E}{R}}}$.

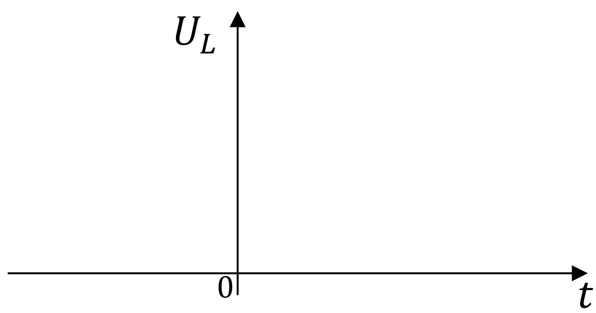
- En conclusion l'intensité parcourant le circuit RL série soumis à un échelon de tension montant s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{i(t \geq 0) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}}$$

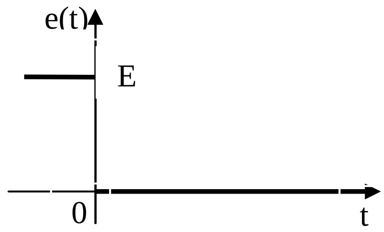
A l'aide de la relation courant-tension de la bobine $U_L = \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}$, on obtient l'expression de la tension à ces bornes: $\boxed{\boldsymbol{U_L(t > 0) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}}}$

Contrairement à l'intensité, la tension aux bornes de la bobine n'est pas continue à l'allumage de la source : $\boldsymbol{U_L(t = 0^-) = 0 \neq U_L(t = 0^+) = E}$.





3) Rupture du courant dans une bobine



On éteint la source de tension à l'instant initial :
- $t < 0, e(t) = E$
- $t > 0, e(t) = 0$

Pour $\boldsymbol{t > 0}$**,** la bobine est soumise à un échelon de tension descendant et l'équation différentielle devient : $\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0}$ (second membre nul : régime libre - sans excitation)
La solution s'écrit $\boxed{i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$ et A s'obtient comme précédemment à l'aide des conditions initiales.

<u>Détermination de la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales</u> :

Pour $\boldsymbol{t} < 0$, le générateur est allumé.
L'intensité est constante, le régime est donc continu et la bobine se comporte comme un court-circuit (voir Chapitre 2) d'où $\boldsymbol{U_L = 0}$.L'intensité vaut alors $\boldsymbol{i = \frac{E}{R}}$.

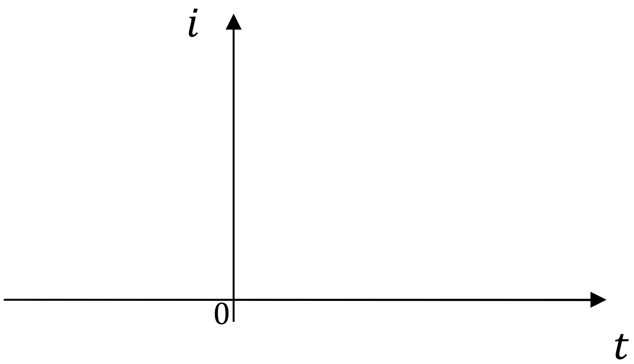
Pour $\boldsymbol{t > 0}$, le générateur est éteint.
<u>Par continuité de l'intensité traversant une bobine</u> : $\boldsymbol{i(t = 0^-) = i(t = 0^+)}$.
$i(t = 0^-) = \frac{E}{R}$ (obtenue à $t < 0$) et $i(t = 0^+) = A$ (obtenue à partir de la solution précédente valable pour $t > 0$) soit $\boxed{A = \frac{E}{R}}$.

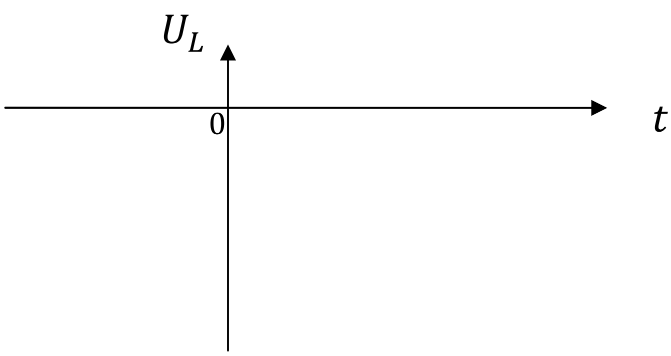
- En conclusion l'intensité parcourant le circuit RL série soumis à un échelon de tension montant s'écrit :

$$\boxed{i(t \geq 0) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

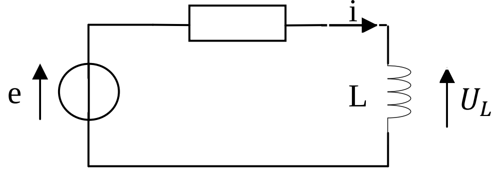
A l'aide de la relation courant-tension de la bobine $U_L = L\frac{di}{dt}$, on obtient l'expression de la tension à ces bornes: $\boxed{U_L(t > 0) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$

Contrairement à l'intensité, la tension aux bornes de la bobine n'est pas continue à l'extinction de la source : $\boldsymbol{U_L(t = 0^-) = 0 \neq U_L(t = 0^+) = E}$.





4) Bilan énergétique



Bilan de puissance (P)
En multipliant la loi des mailles par l'intensité i, on obtient le bilan de puissance suivant $ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2)$ avec :
- $P_{f,e} = ei$: puissance fournie (convention générateur) par le générateur.
- $P_{r,R} = Ri^2$: puissance reçue (convention récepteur) par le résistor.
- $P_{r,L} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_L)$: puissance reçue (convention récepteur) par la bobine et stockée sous forme d'énergie magnétique $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$.

Bilan d'énergie ($W = \int Pdt$)

- *Lors de l'établissement du courant* ($e = E$), l'énergie (ou le travail) fournie par le générateur ($W_{f,e}$) est en partie emmagasinée dans la bobine ($W_{r,L}$) et en partie dissipée par effet Joule dans la résistance ($W_{r,R}$). Or $W_{r,L} = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$ et $W_{f,e} = L\left(\frac{E}{R}\right)^2$. Ainsi d'après le bilan d'énergie $W_{f,e} = W_{r,L} + W_{r,R}$ il vient $\boldsymbol{W_{r,R} = W_{r,L}}$ **: l'énergie délivrée par l'alimentation est équitablement répartie entre la résistance et la bobine (comportement récepteur).**

- *Lors de la rupture du courant* ($e = 0$), le bilan d'énergie devient $W_{f,e} = W_{r,L} + W_{r,R} = 0$ soit $\boldsymbol{W_{r,R}} = -\boldsymbol{W_{r,L}} = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$ **: la bobine restitue l'énergie stockée lors de l'établissement du courant (comportement générateur) qui est dissipée par effet Joule dans la résistance.**

Remarque : La résistance se comporte dans tous les cas comme un récepteur $W_{r,R} > 0$.

B. Circuit du second ordre - Circuit RLC série

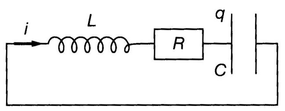
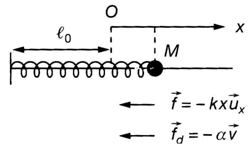
1) Equation différentielle

2) Régime libre
a) Conditions initiales
b) Les différents types de régimes (analogie électromécanique)
c) Circuit oscillant (R=0)

3) Réponse à un échelon de tension
a) Conditions initiales
b) Régime transitoire

4) Bilan énergétique

ANALOGIE ELECTROMECANIQUE

	Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
Système mis en jeu	 Circuit R, L, C série en régime libre Figure 30	 (raideur k du ressort, coefficient α de frottement) Figure 31
Équation de l'oscillateur	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ (charge q du condensateur)	$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (élongation x)
Pulsation propre	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Facteur de qualité (sans dimension)	$Q = \frac{L\,\omega_0}{R}$	$Q = \frac{m\,\omega_0}{\alpha}$
Énergie de l'oscillateur	$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$	$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{2}m\,v^2$
Bilan énergétique instantané	$d\mathscr{E} = -Ri^2\,dt$	$d\mathscr{E}_m = -\alpha v^2\,dt$

Rappel : Oscillateurs mécaniques et électriques

- Equation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, sans second membre :

(régime libre)

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0} \quad \left(\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0\right)$$

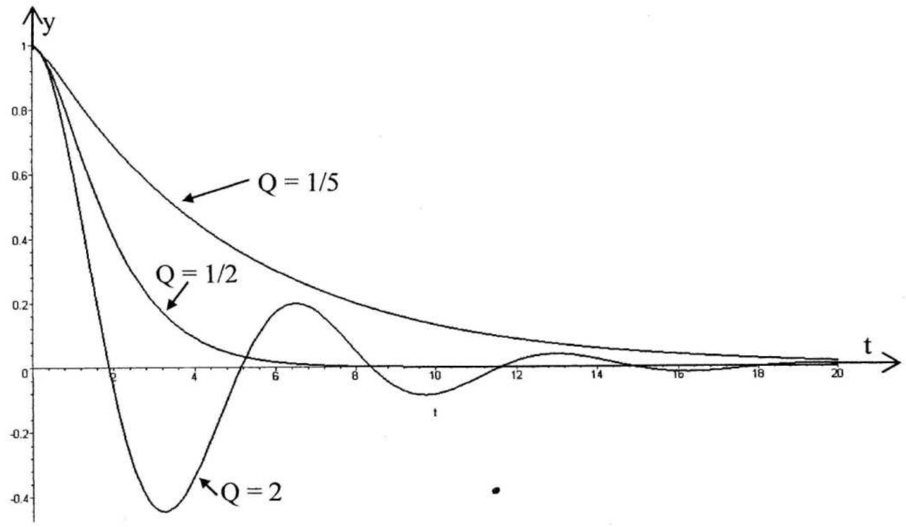
- Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$

Signe de Δ Valeur de Q Nature du régime	Racines de l'équation caractéristique	Solutions de l'équation différentielle
$\Delta > 0$ $Q < 0{,}5$ Régime apériodique	$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ $r_\pm < 0$	$y(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}$
$\Delta = 0$ $Q = 0{,}5$ Régime critique	$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$y(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$
$\Delta < 0$ $Q > 0{,}5$ Régime pseudo-périodique	$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega$ avec $\begin{cases}\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\ j^2 = -1\end{cases}$	$y(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$ ou $y(t) = Ce^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\cos(\Omega t + \varphi)$

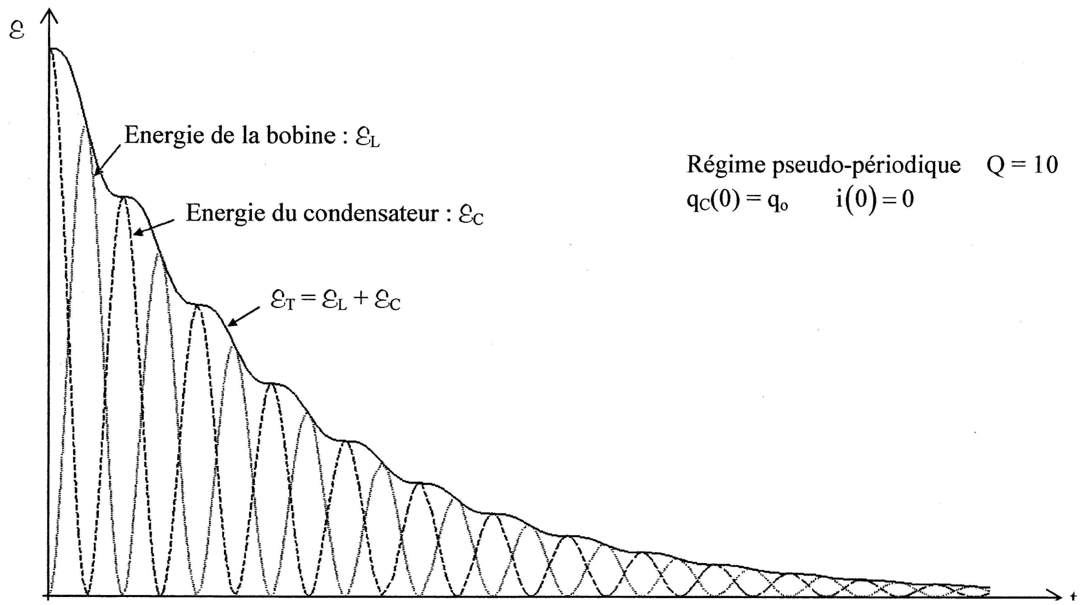
- (A, B) ou $(C ; \varphi)$ sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales : $y(t=0)$ et $\dot{y}(t=0)$.
- Quelque soit la nature du régime on constate $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$: régime libre (sans excitation)

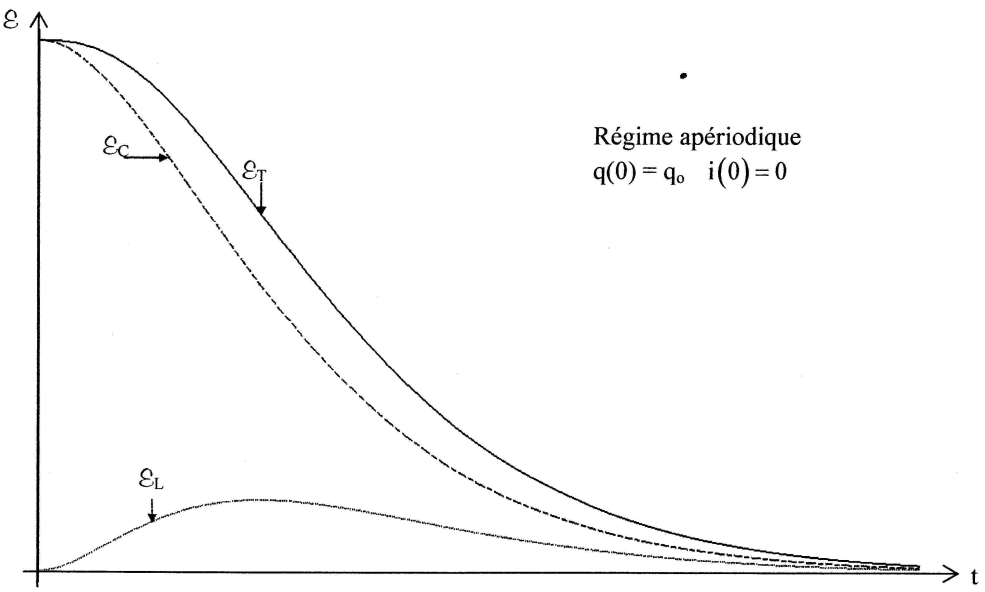
Régime libre du circuit RLC série $\left(y(t) = \frac{U_C}{E}\right)$



conditions initiales :

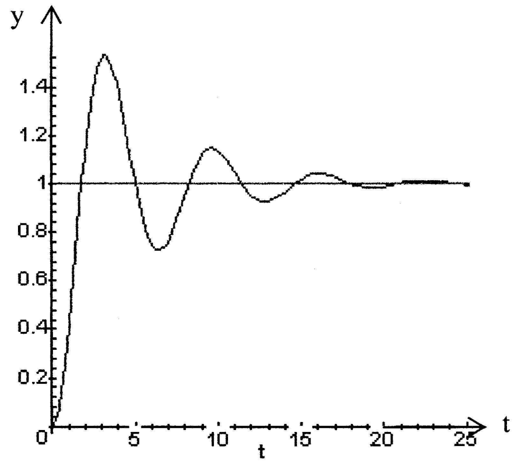
$y(0) = 1 \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0$





Circuit RLC série soumis à un échelon de tension $\left(y(t) = \frac{U_C}{E}\right)$

- ***Régime pseudo - périodique (Q>0,5)***



- ***Régime apériodique (Q<0,5) - Régime critique (Q=0,5)***