Méthodes d'étude des circuits linéaires en régime continu

Cadre d'étude :

Un réseau électrique (*ensemble de dipôles électrocinétiques reliés par des conducteurs filiformes de résistance négligeable*) constitue un circuit linéaire si l'ensemble des dipôles sont linéaires (*il existe une relation affine entre i et u ou une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant i et u*).

Ce circuit linéaire peut être étudié :

- **en régime stationnaire** (ou régime permanent) : les grandeurs électriques I, U sont indépendantes du temps. On s'intéresse au cas particulier du **régime continu**. Les dipôles passifs seront donc des résistors linéaires car comme on l'a vu dans le chapitre 2, un condensateur idéal est assimilé à un coupe-circuit et une bobine idéale à un court-circuit en régime continu. Les dipôles actifs seront des électromoteurs linéaires caractérisés par (E, R) ou (I_o, R).
- **en régime variable** : les grandeurs électriques dépendent du temps i(t), u(t). Dans le cadre particulier de l'ARQS présenté au chapitre 1, les résultats du régime stationnaire seront également valables si les seuls éléments passifs sont des résistors linéaires.

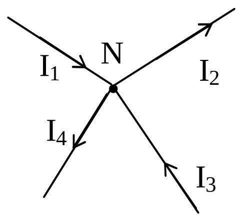
I. MISE EN EQUATION - LOIS DE KIRCHHOFF

1) Rappel : lois de Kirchhoff

Loi des nœuds

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k . i_k = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} \varepsilon_k = +1 & \text{pour un courant arrivant vers N} \\ \varepsilon_k = -1 & \text{pour un courant partant de N} \end{cases}}$$

Exemple :

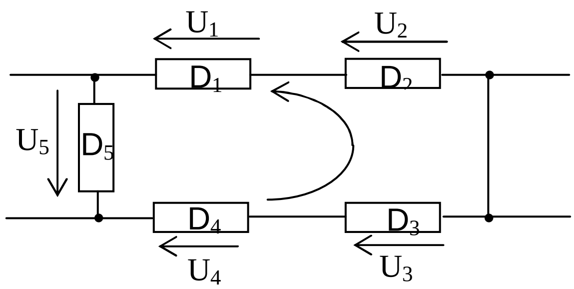


noeud N : $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$

Loi des mailles

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k . u_k = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} \varepsilon_k = +1 & \text{si } u_k \text{ est orientée dans le sens choisi} \\ \varepsilon_k = -1 & \text{si } u_k \text{ est orientée en sens inverse} \end{cases}}$$

Exemple :



$U_1 + U_2 - U_3 - U_4 + U_5 = 0$

Remarque : les lois de Kirchhoff sont également valables si le réseau comporte des éléments non linéaires.

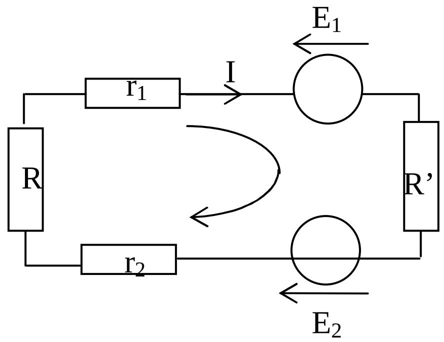
Application : association série et parallèle de dipôles (voir II.1) - Exercice 1 du TD

➢ **Avantages et inconvénients des lois de Kirchhoff**

Leur utilisation est simple et systématique mais pour un réseau compliqué (comportant un grand nombre de mailles) les calculs seront longs. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la valeur de l'intensité du courant dans une branche ou à la valeur de la tension aux bornes d'un dipôle particulier, **l'étude peut être considérablement simplifiée en remplaçant une partie du réseau comprise entre 2 nœuds par un dipôle équivalent** (voir partie II).

2) Loi de Pouillet

Considérons une maille unique ne comportant que des sources de tension et des résistances.



Loi des mailles : $- r_2 I + E_2 - R'I - E_1 - r_1 I - RI = 0$

Soit $I = \dfrac{E_2 - E_1}{r_1 + r_2 + R + R'}$

Plus généralement, pour une maille ne comportant que des sources de tension E_k et des résistances R_n parcourues par la même intensité I :

Loi de Pouillet :
$$\boxed{I = \frac{\sum_k \varepsilon_k . E_k}{\sum_n R_n} \quad \begin{cases} \varepsilon_k = +1 \text{ si } E_k \text{ est orienté dans le sens de I} \\ \varepsilon_k = -1 \text{ dans le cas contraire} \end{cases}}$$

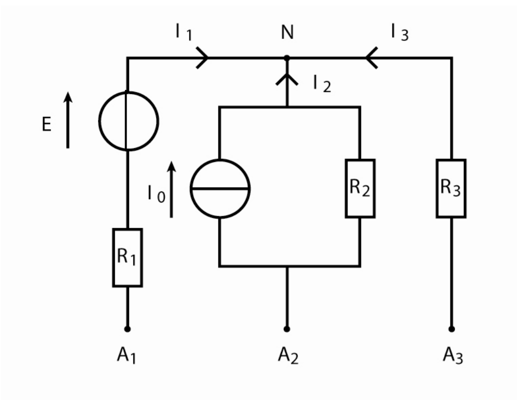
Remarque : Si une maille unique comporte un générateur de courant (c.e.m. I_o), l'intensité est imposée par ce générateur et égale à I_o

Application : Exercice 4 du TD

3) Théorème de Millman

a) Loi des nœuds en termes de potentiels

Soient un générateur réel de tension (E, R_1), un générateur réel de courant (I_0, R_2) et un résistor R_3 disposés respectivement entre les points A_1, A_2, A_3 et le nœud N d'un circuit.
Les potentiels en A_k et N sont notés V_k et V_N.
On note I_k l'intensité du courant dans la branche k, orienté vers N.



- Exprimer les intensités I_k en fonction des potentiels V_k et V_N, des résistances R_k, de E et I_0.

- Exprimer la loi des nœuds en N en termes de potentiels.

La relation obtenue précédemment se généralise à n branches (d'indice k) parvenant en N comportant des résistances R_k (conductance : $G_k = \frac{1}{R_k}$) et éventuellement des sources de tension (f.e.m : E_k) ou de courant (c.e.m : I_{0k}) :

$$\sum_k G_k[(V_k - V_N) + \varepsilon_k E_k] + \sum_k \varepsilon_k I_{0k} = 0$$

$$avec\ \ \varepsilon_k = +1\ si\ E_k\ ou\ I_{0k}\ sont\ orientés\ vers\ N, sinon\ \varepsilon_k = -1.$$

b) Théorème de Millman

Il s'agit d'une variante de la loi des nœuds où l'on exprime le potentiel du nœud N. La relation précédente conduit à :

$$\boxed{V_N = \frac{\sum_k G_k[V_k + \varepsilon_k E_k] + \sum_k \varepsilon_k I_{0k}}{\sum_k G_k} \quad avec\ \ \varepsilon_k = +1\ si\ E_k\ ou\ I_{0k}\ sont\ orientés\ vers\ N, sinon\ \varepsilon_k = -1.}$$

Dans un circuit, on ne mesure pas un potentiel mais la différence entre deux potentiels (tension). On peut choisir comme référence le potentiel d'un point M du circuit noté V_M (souvent $V_M = 0V$ - masse du circuit -). La relation précédente s'écrit :

$$\boxed{V_N - V_M = \frac{\sum_k G_k[(V_k - V_M) + \varepsilon_k E_k] + \sum_k \varepsilon_k I_{0k}}{\sum_k G_k} \quad avec\ \ \varepsilon_k = +1\ si\ E_k\ ou\ I_{0k}\ sont\ orientés\ vers\ N, sinon\ \varepsilon_k = -1.}$$

Application : exercice 2 du TD

4) Théorème d’Helmholtz

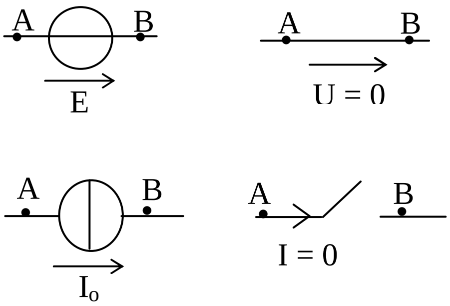
Nous admettrons le théorème d’Helmholtz de superposition des états électriques.

L’état d’un circuit linéaire comportant une distribution quelconque de **sources indépendantes** (tension ou courant) est obtenu en superposant les états associés à chaque source supposée seule dans le circuit (on éteint les autres sources) :

- L’intensité du courant circulant dans une branche est la somme des intensités produites par chaque source supposée seule ;
- La tension aux bornes d’un dipôle est la somme des tensions produites par chaque source supposée seule.

Eteindre une source c'est donner une valeur nulle à sa f.e.m. ou à son c.e.m.

sources idéales *sources éteintes*



* éteindre une source de tension équivaut à la remplacer par un court -circuit (E = 0).

* éteindre une source de courant : équivaut à la remplacer par un circuit ouvert (I_o= 0).

Attention, dans le cas des sources non idéales, les résistances internes doivent être conservées.

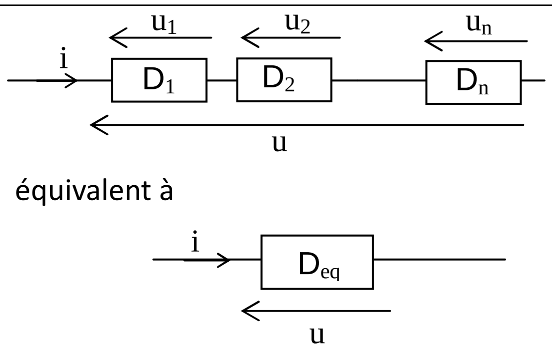
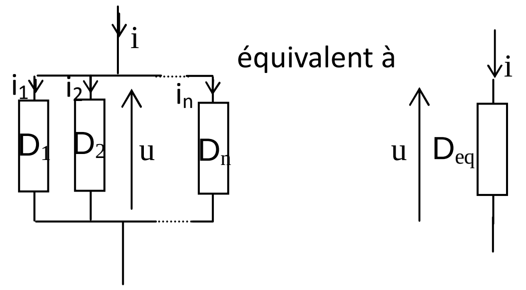
Application : exercice 3 du TD

II. SIMPLIFICATION DE L'ETUDE - DIPOLE EQUIVALENT

Rappel : *Deux dipôles sont équivalents si ∀t, ayant même tension à leurs bornes, ils sont parcourus par la même intensité.*

1) Dipôle passif linéaire

➢ **Association d'éléments de même nature (voir chapitre 2)**

Association en série	**Association en parallèle**
	
D équivalent à D_1 en série avec D_2 : ∀ i, $u = u_1+u_2$	D équivalent à D_1 en parallèle avec D_2: ∀ u, $i = i_1+i_2$
Bobines idéales d'inductance L_k **en série** : $u=u_1+u_2+...=L_1.\frac{di}{dt}+L_2.\frac{di}{dt}+...=L_{eq}.\frac{di}{dt}$ $\boxed{L_{eq} = L_1+ L_2+... = \sum_k L_k}$	**Bobines** idéales d'inductance L_k **en parallèle** : $\frac{di}{dt}=\frac{di_1}{dt}+\frac{di_2}{dt}+..=\frac{1}{L_1}.u+\frac{1}{L_2}.u+..=\frac{1}{L_{eq}}.u$ $\boxed{\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+..=\sum_k\frac{1}{L_k}}$
Condensateurs idéaux de capacité C_k **en série** : $u=u_1+u_2+...$ d'où $\frac{du}{dt}=\frac{du_1}{dt}+\frac{du_2}{dt}+...=\frac{i}{C_1}+\frac{i}{C_2}+...=\frac{i}{C_{eq}}$ $\boxed{\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+...=\sum_k\frac{1}{C_k}}$	**Condensateurs** idéaux de capacité C_k **en parallèle** : $i=i_1+i_2+...=C_1.\frac{du}{dt}+C_2.\frac{du}{dt}+...=C_{eq}.\frac{du}{dt}$ $\boxed{C_{eq}=C_1+C_2+....=\sum_k C_k}$
Résistors de résistance R_k **en série** : $\boxed{R_{eq} = R_1 +R_2 + ...= \sum_k R_k}$ Application : **diviseur de tension**	**Résistors** de résistance R_k **en parallèle** : $\boxed{G_{eq} = G_1 + G_2+... = \sum_k G_k}$ avec $G = \frac{1}{R}$ Application : **diviseur de courant**

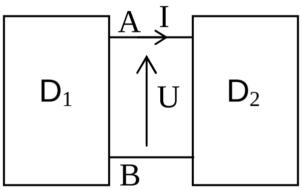
➢ **Association quelconque**

* Combiner les règles d'association série et parallèle dans les cas simples.
* Cas plus complexes : exprimer, en travaillant sur le dipôle réel vu de A et B, U en fonction de I. En déduire R_e= U/I. Les propriétés de symétrie du réseau pourront être utilisées pour simplifier l'étude : si le réseau possède un axe (ou un plan) de symétrie, des branches symétriques seront parcourues par la même intensité, des points symétriques par rapport à cet axe seront au même potentiel...

Application : exercice 5 du TD

2) Dipôle actif linéaire

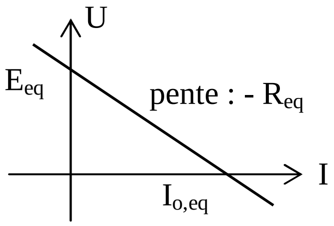
a) Théorèmes de Thévenin et de Norton



Hypothèses :
*D_1 est un dipôle linéaire actif.
* Le dipôle D_2 peut être quelconque.

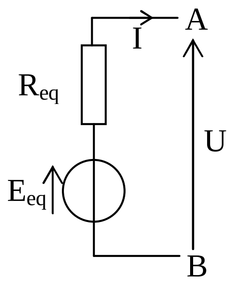
❖ **Dipôles équivalents à D_1**

D_1 étant un dipôle actif linéaire on pourra donc le représenter (voir chapitre 2) par une source de tension idéale en série avec une résistance (modélisation de Thévenin) ou une source de courant idéale en parallèle avec la même résistance (modélisation de Norton) .

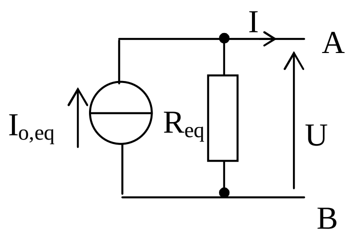


$U = E_{eq} - R_{eq}.I$ (1)
$I = I_{o,eq} - G_{eq}.U$ (2)
avec $\boxed{E_{eq} = R_{eq}.I_{o,eq}}$ et $G_{eq} = 1/R_{eq}$

(1) **Modélisation de Thévenin**



(2) **Modélisation de Norton**



Les grandeurs E_{eq}, $I_{o,eq}$ et R_{eq} ne dépendent que du dipôle D_1 . <u>Détermination de ces grandeurs</u> (algébriques pour E_{eq} et $I_{o,eq}$) :

* **$E_{eq} = U_{CO} = (V_A - V_B)_{CO}$** différence de potentiel aux bornes du dipôle AB en **circuit ouvert** (I = 0), c'est à dire calculée en déconnectant le dipôle D_2.

* **R_{eq}** = - pente de la caractéristique = **$-(U/I)_{\text{sources éteintes}}$** : résistance équivalente au dipôle A-B calculée **sources indépendantes éteintes**.

* **$I_{o,eq} = I_{CC}$** intensité de **court-circuit**, c'est à dire intensité débitée par le dipôle de A vers B lorsque ses 2 bornes sont reliées par un fil parfaitement conducteur.

Remarques :

*Les relations permettant le calcul des grandeurs caractéristiques E_{eq} , $I_{o,eq}$ et R_{eq}, sont données ici avec le choix de I sortant de D_1 . On peut faire le choix inverse avec I entrant en A, alors :

$$\begin{cases} (1') \ U = E_{eq} + R_{eq}.I \\ (2') \ I = I_{o,eq} + G_{eq}.U \end{cases}$$

même définition pour E_{eq} mais $I_{o,eq} = - G_{eq}.E_{eq}$ et $R_{eq} = (U/I)_{\text{sources éteintes}}$

*Les modèles équivalents donnés ne le sont que pour la caractéristique externe du dipôle D_1. On ne peut rien en conclure si l'on s'intéresse à des grandeurs internes.

*Les deux représentations sont évidemment équivalentes : on choisira celle qui sera la plus commode pour l'étude du dipôle extérieur D_2.

❖ Résumé : Théorèmes de Thévenin et de Norton

Théorème de Thévenin : Un dipôle AB constitué d'un ensemble de dipôles linéaires est équivalent pour tout dipôle extérieur, à un générateur de tension réel :

- de f.e.m. E_{eq} égale à la d.d.p. U_{AB} lorsqu'il est débranché du dipôle externe ;
- de résistance équivalente R_{eq} égale à sa résistance lorsque ses sources (libres) sont éteintes.

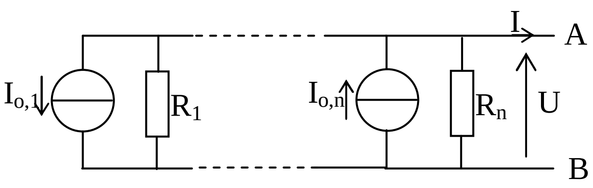
Théorème de Norton : Un dipôle AB constitué d'un ensemble de dipôles linéaires est équivalent pour tout dipôle extérieur, à un générateur de courant réel :

- de c.e.m. $I_{o,eq}$ égal au courant de court-circuit ;
- de conductance équivalente G_{eq} égale à sa conductance lorsque ses sources (libres) sont éteintes.

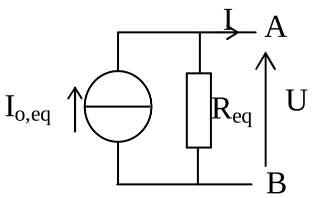
Application : exercices 3 et 4 du TD

b) Association d'éléments de même nature

<u>Sources de courant indépendantes en parallèle</u>



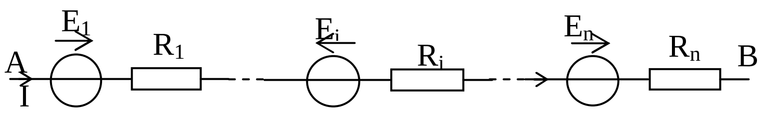
Vu de A et B équivalent à :



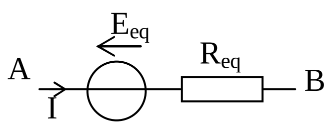
$G_{eq} = \sum_i G_i$ $\boxed{I_{o,eq} = \sum_i \varepsilon_i I_{o,i}}$

ε_i=+1 si $I_{o,i}$ a même sens que celui choisi pour $I_{o,eq}$ (sinon -1).

<u>Sources de tension indépendantes en série</u>



Vu de A et B équivalent à :



$R_{eq} = \sum_i R_i$ $\boxed{E_{eq} = \sum_i \varepsilon_i E_i}$

ε_i= +1 si E_i de même sens que celui choisi pour E_{eq} (sinon -1).