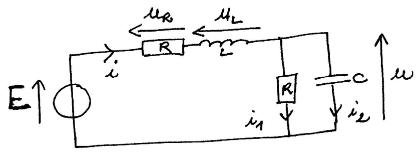
TD Circuits linéaires en régime variable - Correction

Exercice 3 : Réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension

2) $\boxed{t>0}$



. Loi des mailles : $E = U_R + U_L + U$ ④ avec $\begin{cases} U_R = Ri \text{ ②} \;;\; U = Ri_1 \text{ ④} \\ U_L = L\dfrac{di}{dt} \text{ ③} \;;\; i_2 = C\dfrac{dU}{dt} \text{ ⑤} \end{cases}$

. Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2 \xrightarrow{④ \text{ et } ⑤} i = \underbrace{\dfrac{U}{R}}_{*} + C\underbrace{\dfrac{dU}{dt}}_{**}$ avec $U = E - Ri - L\dfrac{di}{dt}$ ①②③

Par conséquent $i = \underbrace{\dfrac{1}{R}\left[E - Ri - L\dfrac{di}{dt}\right]}_{*} + \underbrace{C\dfrac{d}{dt}\left(E - Ri - L\dfrac{di}{dt}\right)}_{**} = \dfrac{E}{R} - i - \dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} - CR\dfrac{di}{dt} - CL\dfrac{d^2i}{dt^2}$

$$\Rightarrow CL\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{di}{dt} + 2i = \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)\frac{di}{dt} + \frac{2i}{LC} = \frac{E}{RCL}$$

Avec $\underline{\tau = RC = \frac{L}{R}}$ il vient $\boxed{\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{2}{\tau}\dfrac{di}{dt} + \dfrac{2}{\tau^2}i = \dfrac{E}{\tau L}}$

. Afin de déterminer la forme de la solution, on calcule le discriminant de l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \frac{2}{\tau^2} = 0$ soit $\Delta = \left(\frac{2}{\tau}\right)^2 - 4\times\frac{2}{\tau^2} = -\frac{4}{\tau^2} < 0$

Le régime est donc pseudo-périodique et la solution s'écrit :

$$i(t) = \underbrace{\left[A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]e^{-t/\tau}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}} + \underbrace{\frac{E}{2R}}_{\text{solution particulière de l'équation avec second membre.}}$$

(explication)

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_\pm = \frac{-\frac{2}{\tau} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\frac{\sqrt{\frac{4}{\tau^2}}}{2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\times\frac{1}{\tau}$$

(Remarque : Pour éviter la confusion avec $i \to$ intensité, le i complexe sera noté j en élec.)

(explication)

$i_p = cste$: on injecte dans l'équation différentielle.

$\dfrac{d^2i_p}{dt^2} = \dfrac{di_p}{dt} = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{\tau^2}i_p = \dfrac{E}{\tau L}$

$\Rightarrow i_p = \dfrac{E\tau}{2L} = \dfrac{E}{2R}$

Les constantes d'intégration A et B se déterminent à partir des conditions initiales :

• $i(0^+) = 0 = \dfrac{E}{2R} + A \Rightarrow \underline{A = -\dfrac{E}{2R}}$

• $\dfrac{di}{dt}(0^+)$: ①②③ $E = \underbrace{Ri(0^+)}_{0} + L\dfrac{di}{dt}(0^+) + \underbrace{U(0^+)}_{0} \Rightarrow \dfrac{di}{dt}(0^+) = \dfrac{E}{L}$ (*)

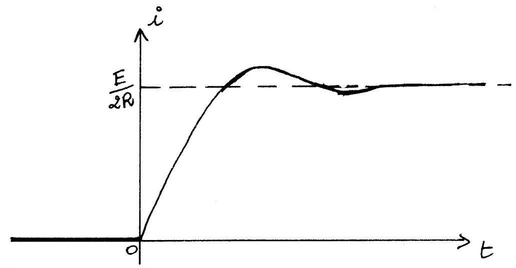
$$\frac{di}{dt} = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\left[\left(B\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) - A\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right) - \left(A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)\right] \quad (**)$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{1}{\tau}\left[B - A\right] = \frac{E}{L} \quad (**) \text{ et } (*)$$

$$\Rightarrow B = \frac{\tau E}{L} + A = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} \Rightarrow \underline{B = \frac{E}{2R}}$$

En conclusion : $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{2R}\left[1 + e^{-t/\tau}\left(\sin\left(\dfrac{t}{\tau}\right) - \cos\left(\dfrac{t}{\tau}\right)\right)\right]}$

Allure de la courbe :



Sous forme canonique $\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{2}{\tau^2}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{2}{\tau}$

d'où $\underline{Q = \dfrac{\tau\omega_0}{2} = \dfrac{\tau}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\tau^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}} > \dfrac{1}{2}$: pseudo périodique très proche du régime critique $\left(Q = \dfrac{1}{2}\right)$

Il y a donc très peu d'oscillations.