TD Forces centrales conservatives

Exercice 1 : Freinage d'un satellite

Dans le référentiel géocentrique (supposé ici galiléen), un satellite artificiel de masse m se déplace suivant une orbite circulaire de rayon $r = R_T + h$ autour du centre de la Terre (h est son altitude par rapport à la surface terrestre, et R_T = 6400 km le rayon de la Terre). Ce mouvement circulaire peut s'étudier simplement à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

1) Montrer que ce mouvement est uniforme, et déterminer la vitesse v en fonction de G, M_T (masse de la Terre), R_T et h.

2) En déduire la période T du mouvement, et montrer que la constante $\frac{T^2}{r^3}$ a la même valeur pour tous les satellites (équivalent de la troisième loi de Kepler).

3) Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite ; commenter le signe de cette dernière.

On suppose maintenant que, dans les hautes couches de l'atmosphère, le satellite est freiné par une force de frottement quadratique $\vec{F}_f = -\alpha m v^2 \vec{\tau}$ (avec $\vec{\tau}$ vecteur unitaire tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement).

4) Quelle est la dimension de α ? Donner son unité dans le système international.

5) En admettant que la trajectoire reste quasi circulaire (soit $\Delta r << r$), déterminer la variation d'énergie mécanique ΔE_m du satellite à chaque révolution. (Solution : $\Delta E_m = -2\pi\alpha G M_T m$)

6) En déduire la variation ΔE_c de son énergie cinétique et celle Δr du rayon de la trajectoire, toujours pour une révolution. Commenter leurs signes. (Solution : $\Delta r = -4\pi\alpha r^2$)

Exercice 2 : Menace sur la Terre

Un météore M de masse m très petite devant la masse M_T de la Terre (de centre O) arrive de l'infini avec la vitesse $\vec{v_0}$ par rapport à la Terre. La distance, entre le support de la vitesse initiale $\vec{v_0}$ (loin du point O) et la droite passant par O et parallèle à $\vec{v_0}$, est appelée paramètre d'impact et noté b.

1) Faire un schéma du problème (on prendra l'axe (Ox) parallèle à $\vec{v_0}$). Quel type de trajectoire suit le météore ?

2) A l'aide des lois de conservation, calculer sa distance r_{min} de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0, b, M_T et G (constante de gravitation). (Solution : $r_{min} = -\frac{GM_T}{v_0^2} + \sqrt{(\frac{GM_T}{v_0^2})^2 + b^2}$)

3) A quelle condition sur b le météore contournera-t-il la Terre sans s'écraser dessus ?

Déterminer alors la valeur minimale b_{min} de b pour que le météore ne rencontre pas la Terre.

4) <u>Cette condition étant vérifiée</u> :

a) Déterminer la valeur de la vitesse $v_f = \|\vec{v_f}\|$ du météore au bout d'un temps infini après le contournement de la Terre.

b) Appliquer le PFD au météore et l'intégrer entre le point de départ à $\vec{v_0}$ et un point à l'infini après le contournement de la Terre $\vec{v}_f$.

c) En projetant cette intégration suivant l'axe (Ox), en déduire l'angle de déviation φ (angle entre $\vec{v_0}$ et $\vec{v_f}$) du météore en fonction de v_0, b, M_T et G. (Solution : $\tan(\frac{\varphi}{2}) = \frac{GM_T}{bv_0^2}$)

Exercice 3 : Changement d'orbite – Ellipse de transfert

La Terre est supposée à symétrie sphérique, de centre C et de rayon r_0. On note g_0 l'intensité du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. On donne : $r_0 = 6400 km$, $g_0 = 9{,}8 m.s^{-2}$.

1) Un satellite, de masse m, décrit une trajectoire circulaire rasante de rayon r_0.
Quelles les expressions de la vitesse v_0 et de la période T_0 du satellite en orbite rasante ?
Calculer numériquement v_0 et T_0.

2) Un satellite géostationnaire décrit une trajectoire circulaire située dans le plan équatorial, et semble fixe pour un observateur terrestre.
a) Pourquoi un satellite géostationnaire a obligatoirement sa trajectoire dans le plan équatorial ?
b) Déterminer le rayon r_1 de l'orbite d'un satellite géostationnaire et la vitesse v_1 de ce satellite.
Calculer numériquement r_1 et v_1.

3) On veut faire passer un satellite de l'orbite circulaire rasante de rayon $r_0 = CP$ à l'orbite géostationnaire de rayon $r_1 = CA$. Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite aux points P et A. Le satellite parcourt alors une demi-ellipse, dite de transfert, de périgée P et d'apogée A dont l'un des foyers est C.
a) Déterminer littéralement puis numériquement les vitesses v_0' et v_1' du satellite en P et A sur sa trajectoire elliptique.
b) Calculer la durée du transfert de P à A.

4) On note W_0 l'énergie à communiquer au satellite pour qu'il puisse atteindre l'orbite rasante depuis une base de lancement sur Terre; W_1 l'énergie à communiquer au satellite en P pour qu'il puisse atteindre sa nouvelle vitesse v_0' ; W_2 l'énergie à communiquer au satellite en A pour qu'il puisse atteindre sa nouvelle vitesse v_1'.
a) Déterminer W_0.
b) Déterminer W_1 et W_2 en fonction de W_0 et du rapport $\rho = \frac{r_1}{r_0}$.