Problème de mécanique : Etude d'un ressort dans deux référentiels

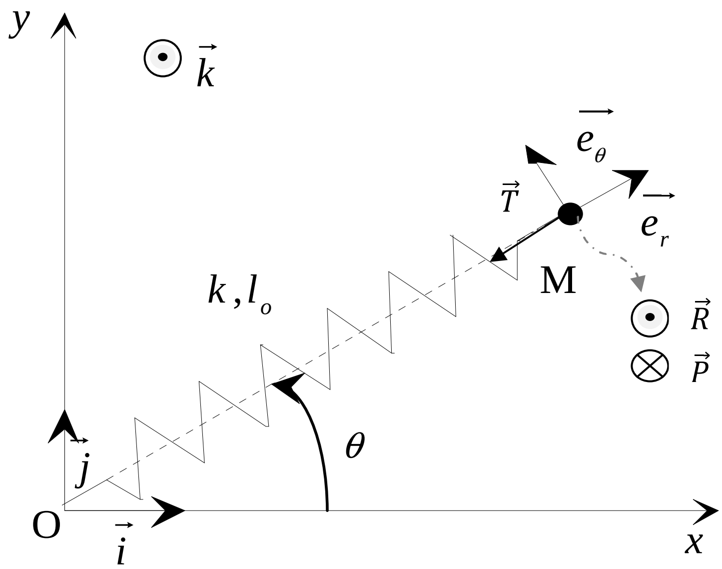
A- Etude dans le référentiel R du laboratoire :

Système : palet assimilé à un point matériel M de masse m.

***Référentiel d'étude* R :** référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Bilan des forces (A-1) :

- le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$
- la force de rappel du ressort (dessin ressort étiré) : $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{e}_r = -k(r - l_0)\vec{e}_r$
- la réaction du support : $\vec{R} = R\vec{k}$ normale au plan (O, x, y) car on néglige les frottements.



A-1 ✱ En appliquant <u>le principe fondamental de la dynamique</u> à M dans le référentiel R il vient :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\,\vec{a}(M)$$

Le mouvement se fait dans le plan (xOy) donc $\vec{a}(M)\cdot\vec{k} = \vec{0}$

d'où $(\vec{P} + \vec{R})\cdot\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{-mg + R = 0}$: <u>le poids et la réaction du support se compensent.</u> $(\vec{P} = -\vec{R})$

✱ On applique <u>le théorème du moment cinétique</u> à M <u>par rapport à O</u> dans R :

$$\frac{d\vec{L_o}(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{R}) = \vec{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{T} + \vec{R})$$

soit $\dfrac{d\vec{L_o}(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{T}$ (car $\vec{R}$ et $\vec{P}$ se compensent).

d'où $\dfrac{d\vec{L_o}(M)}{dt} = r\vec{e_r} \wedge (-k(r - l_o))\vec{e_r} = \vec{0}$.

$\boxed{\text{Ainsi } \vec{L_o}(M) \text{ est une constante : il y a conservation du moment cinétique par rapport à O.}}$

A-2.1] $\vec{L_o} = \vec{OM}(t) \wedge m\vec{v}(t) = \vec{OM}(t=0) \wedge m\vec{v}(t=0)$

d'où $\vec{L_o} = 1,2 l_o \vec{i} \wedge m\vec{O}$

la masse est lâchée sans vitesse initiale

soit $\boxed{\vec{L_o} = \vec{O}}$. Le mouvement est rectiligne suivant l'axe (Ox)

A-2-2] Le principe fondamental de la dynamique établi à la question A1] projeté suivant $\vec{e_r}$:

$$m\vec{a}(M).\vec{e_r} = -k(l-l_o) = m\ddot{l} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\begin{array}{c}\ddot{l} + \omega_o^2 l = \omega_o^2 l_o \\ \text{avec } \omega_o^2 = \dfrac{k}{m}\end{array}}$$

mouvement rectiligne suivant (Ox)

La solution générale de l'équation sans second membre $\ddot{l} + \omega_o^2 l = 0$ $(\Delta < 0)$

est $l_G = A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t$

. La solution particulière de l'équation avec second membre est :

$l_p = l_o$

La solution générale de l'équation avec second membre est :

$$\boxed{l(t) = l_G + l_p = l_o + A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t}$$

. Détermination des constantes d'intégration :

. $l(t=0) = 1,2 l_o = l_o + A$ soit $\boxed{A = 0,2 l_o}$

. $\dot{l}(t=0) = 0 = \omega_o B$ soit $\boxed{B = 0}$

sans vitesse initiale

$$\boxed{l(t) = l_o(1 + 0,2\cos\omega_o t)}$$

$l \in [0,8 l_o ; 1,2 l_o]$

A.3.1] . $\vec{L_o} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ avec $\begin{cases} \vec{OM} = r\vec{e_r} \\ \vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} \end{cases}$

d'où $\boxed{\vec{L_o} = mr^2\dfrac{d\theta}{dt}\vec{k}} = L\vec{k}$

. $\vec{L_o}$ étant constante : $\vec{L_o} = L\vec{k} = \vec{OM}(t=0) \wedge m\vec{v}(t=0)$

d'où $\vec{L_o} = l_1\vec{i} \wedge m l_1 \omega \vec{j}$ soit $\boxed{\vec{L_o} = m l_1^2 \omega \vec{k}}$

Soit $\boxed{L = m l_1^2 \omega = mr^2 \dfrac{d\theta}{dt}}$

A.3.2] Energie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$

soit ($\ell = r$) $\boxed{E_p = \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2}$

• Comme le mouvement se fait à altitude constante alors $E_{p\,pesanteur} = cste$ et n'influe donc pas sur le mouvement de M.

• Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit : $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{des forces non conservatives}}}$

* $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sont perpendiculaires au déplacement de M donc ne travaillent pas.
* $\vec{T}$ est conservative car dérive d'une énergie potentielle.
* On néglige les frottements.

Ainsi $\mathcal{P}_{\text{forces non conservatives}} = 0$ d'où $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = 0}$ soit Em se conserve au cours du mouvement.

• Comme on ne tient pas compte de l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_{p\,élastique} \Rightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right) + \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2}$$

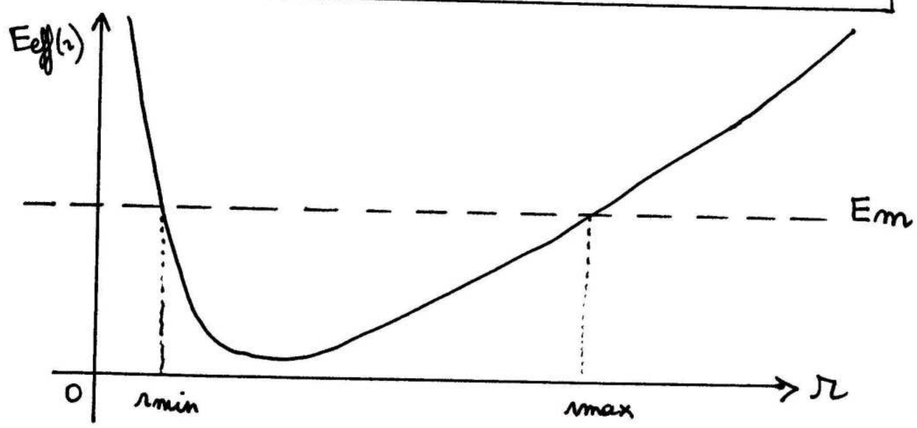
$$E_m = \frac{1}{2} m v(t=0)^2 + \frac{1}{2} k (r(t=0) - \ell_0)^2 \text{ soit}$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m \ell_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} k (\ell_1 - \ell_0)^2}$$

A.3.3] $E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{m r^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$

or $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2}$ soit $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$ d'où

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2 m r^2} + \frac{k (r - l_0)^2}{2}}_{E_{eff}(r)}}$$



A.3.4] • Comme $E_m \geqslant E_{eff}(r)$ et E_m est une constante du mouvement : on la représente par une droite horizontale sur le graphe ci-dessus.

$\boxed{\text{Le mouvement est borné } (r \in [r_{min} ; r_{max}]) \text{ et le point M ne peut pas s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction } (r < r_{max})}$

A.3.5] • $\vec{L_o}$ est une constante différente de 0 $(L_o = L = m l_1^2 \omega)$

Or $\underbrace{\vec{L_o}}_{\neq \vec{0}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ avec $\underline{\vec{OM} \text{ borné}}$. $\boxed{\text{Ainsi } \vec{v} \text{ ne peut s'annuler au cours du mouvement}}$

A.3.6] Par le même raisonnement que précédemment $\underbrace{\vec{L_o}}_{\neq \vec{0}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ est une constante.

$\boxed{\text{Ainsi } \vec{OM} \neq \vec{0} \text{ et la particule ne peut pas passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement } (r > r_{min})}$

A-4-1] Mouvement circulaire $r = l_1$ = constante. Le mouvement est à force centrale ($\vec{R}$ et $\vec{P}$ se compensent, il ne reste que $\vec{T}$) donc $\vec{L_O} = mr^2\frac{d\theta}{dt}\vec{k} = L\vec{k}$ est une constante du mouvement comme nous l'avons établie plus haut.

D'après les conditions initiales : $L = ml_1^2\omega = mr^2\frac{d\theta}{dt}$ soit ($r = l_1$)

$ml_1^2\omega = ml_1^2\frac{d\theta}{dt}$ d'où $\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{constante}}$. Le mouvement est donc circulaire uniforme.

A.4.2] Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M s'écrit :

$$m\vec{a}(M) = -k(l_1 - l_0)\vec{e_r} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{OM} = l_1\vec{e_r} \\ \vec{v}(M) = l_1\omega\vec{e_\theta} \\ \vec{a}(M) = -l_1\omega^2\vec{e_r} \end{cases}$$

D'où $-ml_1\omega^2\vec{e_r} = -k(l_1 - l_0)\vec{e_r}$ et en projetant sur $\vec{e_r}$:

$l_1\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) = -\frac{k}{m}l_0$. En posant : $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ on obtient

$\boxed{l_1 = \frac{\omega_0^2 l_0}{\omega_0^2 - \omega^2}}$ Il faut que $l_1 > 0$ d'où $\omega_0^2 - \omega^2 > 0$ soit $\omega < \omega_0 \Rightarrow \boxed{\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}}$

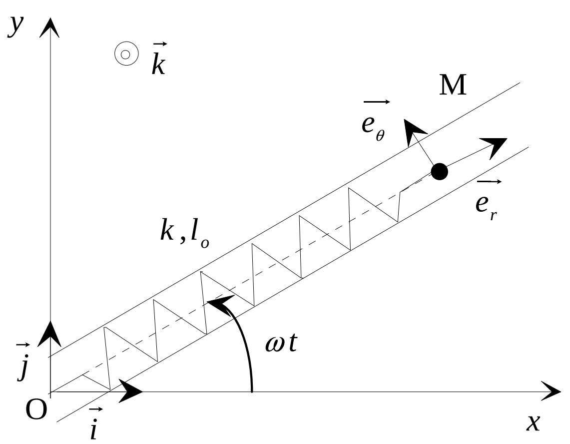
B - Etude dans un référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe :

Système : voir A.

***Référentiel d'étude* R' :** en rotation uniforme autour d'un axe Oz fixe, de vecteur vitesse $\vec{\Omega} = \omega\vec{k}$, et associé au repère (O, $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$, $\vec{k}$).

R' est en rotation autour d'un axe fixe de R galiléen donc **R' n'est pas galiléen**.

Bilan des forces :
- forces d'interaction : voir A.
- forces d'inertie (R' non galiléen) : voir B-1.



B-1 * force d'inertie d'entrainement $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e}$ où $\vec{a_e}$ est l'accélération d'entrainement. C'est l'accélération de M, s'il était fixe dans R', par rapport à R (Point coïncident). Le point coïncident décrit un cercle de rayon OM à la vitesse angulaire constante ω (mouvement circulaire uniforme) : $\vec{a_e} = -r\omega^2\vec{e_r}$ d'où $\boxed{\vec{F_{ie}} = mr\omega^2\vec{e_r}}$

* force d'inertie de Coriolis : $\vec{F_{ic}} = -m\vec{a_c}$ avec $\vec{a_c} = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{R'}(M)$

Or $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ d'où $\vec{v}_{R'}(M) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R'} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r}$ (car $\vec{e_r}$ est fixe dans R' $\left(\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_{R'} = 0$)

Ainsi $\vec{a_c} = 2\omega\vec{k}\wedge\frac{dr}{dt}\vec{e_r} = 2\omega\frac{dr}{dt}\vec{e_\theta}$.

Par conséquent $\boxed{\vec{F_{ic}} = -2m\omega\frac{dr}{dt}\vec{e_\theta}}$

B-2] • $\delta W_{F_{ic}} = \vec{F_{ie}}\cdot(d\vec{OM})_{R'} = m\omega^2 r\vec{e_r}\cdot\left(dr(\vec{e_r}) + r\underbrace{d\vec{e_r}}_{=0\ (\vec{e_r}\text{ fixe dans }R')}\right)$

$= m\omega^2 r\,dr$

Soit $\delta W_{F_{ie}} = d\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2}\right) = -dEp_{F_{ie}}$ d'où

$$\boxed{Ep_{F_{ie}} = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}}$$

B-3] $\mathcal{P}(\vec{F_{ic}}) = \vec{F_{ic}}\cdot\vec{v}(M)_{R'}$

Or $\vec{F_{ic}}$ est perpendiculaire à $\vec{v}(M)_{R'}$ donc $\mathcal{P}(\vec{F_{ic}}) = 0$ et la force de Coriolis ne travaille pas. Il n'y a pas lieu de lui associer une énergie potentielle.

B-4] • $\underline{E_{p\,totale} = E_{pT} = E_{p\,elastique} + E_{p\,Fie}}$. On ne considère toujours pas le poids puisque le mouvement est contenu dans un plan horizontal (z = cste). Ainsi $\boxed{E_{pT} = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 - \frac{m\omega^2 r^2}{2}}$

• $\frac{dE_{pT}}{dr} = k(r-l_0) - m\omega^2 r = (k - m\omega^2) r - kl_0$

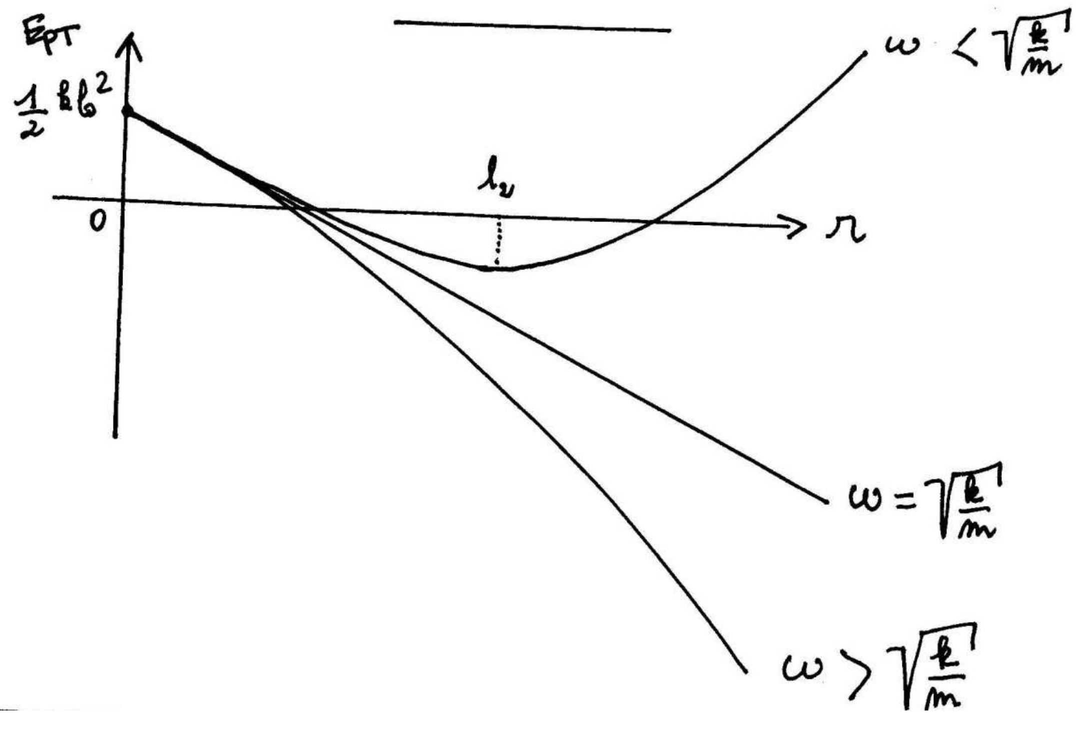
* $\boxed{\text{Si } k < m\omega^2}$ alors $\frac{dE_{pT}}{dr} < 0$ et <u>E_{pT} est une fonction décroissante</u>

* $\boxed{\text{Si } k = m\omega^2}$ alors $\frac{dE_{pT}}{dr} = -kl_0$ est une constante négative et <u>E_{pT} est une droite de pente négative</u>

* $\boxed{\text{Si } k > m\omega^2}$ alors

r	0		$\frac{kl_0}{k - m\omega^2}$		$+\infty$
$\frac{dE_{pT}}{dr}$		$-$	0	$+$	
E_{pT}		$\searrow$	l_2	$\nearrow$	

<u>E_{pT} possède un minimum</u> $(r = l_2)$



B.5] Pour déterminer la position d'équilibre dans (R') on applique le principe fondamental de la dynamique à M dans R' :

$$\underbrace{m\,\vec{a}(M)_{R'}}_{=\vec{0}\ \text{équilibre}} = \underbrace{\vec{P}+\vec{R}}_{\text{suivant } \vec{k}} + \underbrace{\vec{T}+\vec{F}_{ie}}_{\text{suivant } \vec{e_r}} + \underbrace{\vec{F}_{ic}}_{=\vec{0}\ \text{équilibre}}$$

D'où $\vec{T}+\vec{F}_{ie}=\vec{0}$ soit $-k(l_2-l_0)\vec{e_r} + m\omega^2 l_2\vec{e_r} = \vec{0}$ en projetant sur $\vec{e_r}$ il vient $\boxed{l_2 = \dfrac{k l_0}{k-m\omega^2} = \dfrac{\omega_0^2 l_0}{\omega_0^2-\omega^2}}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

à la condition $\boxed{\omega < \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ $(l_2 > 0)$.

- Ceci correspond au minimum de E_{pT} vérifiant la condition $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$: c'est un équilibre stable ($E_{pT}(l_2)$ minimale)

B.6] Dans (R) M a un mouvement circulaire de rayon $l_2 = l_1$ à vitesse angulaire, ω, constante. Les résultats des questions A4 et B5 sont cohérents.
