# CHIMIE : Equilibres de précipitation

## Questions de cours

*__1)__ Donner la définition de la solubilité, noté s (on précisera l'unité).*

**Définition** : A une température donnée, on appelle solubilité s d'un composé $C_xA_y$, le quotient de la quantité de composé qu'il a fallu dissoudre pour obtenir une **solution saturée** par le volume V de solution saturée obtenue.
On exprime en général la solubilité en mol.L$^{-1}$ (ou en g.L$^{-1}$).

---

*__2)__ Exprimer la solubilité de l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$ en fonction de son produit de solubilité $K_S$.*

| | $Al(OH)_{3(s)} =$ | $Al^{3+}_{(aq)}$ | $+3OH^-_{(aq)}$ |
|---|---|---|---|
| quantité apportée | $n_0$ | 0 | 0 |
| quantité à saturation | $n_0 - sV$ | $sV$ | $3sV$ |
| Concentration à saturation | Solide | $s$ | $3s$ |

A saturation :

$K_S = [Al^{3+}][OH^-]^3$

soit $K_S = s \times (3s)^3$

d'où $s^4 = \frac{K_S}{27}$

Conclusion : $\boxed{s = \left(\frac{K_S}{27}\right)^{1/4}}$

---

## EXERCICE : Précipitation et complexation

① Si pOH augmente alors $[OH^-]$ diminue et $Al^{3+}$ prédomine sur le complexe $Al(OH)_4^-$.

d'où $\boxed{① \ Al^{3+} \quad \text{et} \quad ② \ Al(OH)_4^-.}$

---

② Le précipité existe lorsqu'une partie de l'aluminium a précipité pour donner l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$ soit lorsque $\% Al^{3+} + \% Al(OH)_4^- < 100$.

Ce qui correspond sur le graphique à l'intervalle suivant : $\underset{Ⓑ}{2{,}2} \leq pOH \leq \underset{Ⓐ}{10{,}6}$

Sachant que $pKe = pOH + pH$ $\begin{cases} Ke = [OH^-][H_3O^+] \\ pKe = 14 \text{ à } 25°C \end{cases}$ il vient $\boxed{3{,}4 \leq pH \leq 11{,}8}$.

3) • Le point anguleux A correspond à l'apparition du précipité, suite à l'ajout de la solution concentrée d'ion $OH^-$, d'équation bilan : $Al^{3+} + 3OH^- = Al(OH)_3$ $\quad \frac{1}{K_S}$ avec

$$K_S = [Al^{3+}][OH^-]^3.$$

• En se plaçant à la limite d'apparition du précipité
$$\begin{cases} [Al^{3+}] = 0{,}1 \text{ mol.L}^{-1} \\ [OH^-] = [OH^-]_A = 10^{-pOH_A} = 10^{-10{,}6} \text{ mol.L}^{-1} \end{cases}$$

d'où
$$\boxed{\begin{array}{l} K_S = 10^{-32{,}8} \\ pK_S = 32{,}8 \end{array}}$$

---

4) • Le point anguleux B correspond à la disparition du précipité, suite à l'ajout de la solution concentrée d'ions $OH^-$, d'équation bilan : $Al(OH)_3 + OH^- = Al(OH)_4^-$

de constante $K = \frac{[Al(OH)_4^-]}{[OH^-]} = K_S \times \beta_4$ avec $\beta_4$ constante associée à la réaction suivante

$$Al^{3+} + 4OH^- = Al(OH)_4^- \quad \left\{ \beta_4 = \frac{[Al(OH)_4^-]}{[OH^-]^4[Al^{3+}]} \right)$$

• En se plaçant à la limite de disparition du précipité :
$$\begin{cases} [Al(OH)_4^-] = 0{,}1 \text{ mol.L}^{-1} \\ [OH^-] = [OH^-]_B = 10^{-pOH_B} = 10^{-3{,}2} \text{ mol.L}^{-1} \end{cases}$$

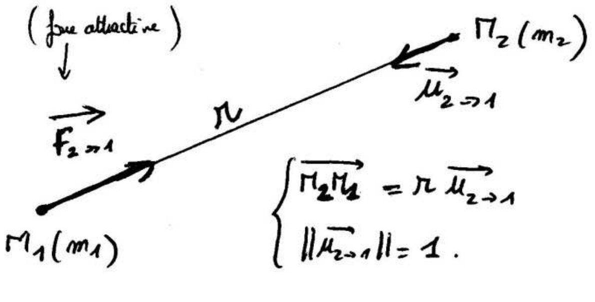
d'où $\beta_4 = \frac{10^{-1} \times 10^{2{,}2}}{K_S}$ soit
$$\boxed{\begin{array}{l} \beta_4 = 10^{34} \\ \log \beta_4 = 34 \end{array}}$$

---

# PHYSIQUE : Mécanique

## Questions de cours

1)




$$\begin{cases} \overrightarrow{M_2M_1} = r\,\overrightarrow{u_{2\to1}} \\ \|\overrightarrow{u_{2\to1}}\| = 1. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{F_{2\to1}} &= -G\frac{m_1m_2}{(M_1M_2)^3}\overrightarrow{M_2M_1} \\ &= -G\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_{2\to1}} \end{aligned}}$$

G : constante universelle de gravitation

------------------------------------------------------------

2)

- **<u>1ère loi de Newton : Principe d'inertie</u>**

| |
|---|
| Il existe des référentiels privilégiés, appelés **référentiels galiléens**, par rapport auxquels tout **point matériel isolé** (ou pseudo-isolé) est soit au repos, soit en mouvement **rectiligne uniforme**. |

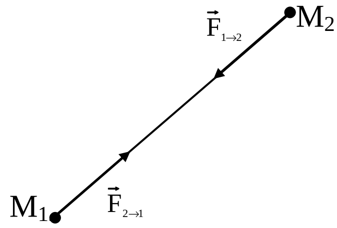
- **<u>2ème loi de Newton : Relation fondamentale de la dynamique</u>** :

Dans un **référentiel galiléen**, $R_g$, le mouvement d'un point matériel soumis à un ensemble de forces de résultante $\vec{F}$ est décrit par la loi : $\vec{F} = \left(\frac{d\vec{p}(M/R)}{dt}\right)_{R_g} = m.\vec{a}(M/R_g)$

- **<u>3ème loi de Newton : Principe des actions réciproques (ou principe de l'action et de la réaction)</u>**

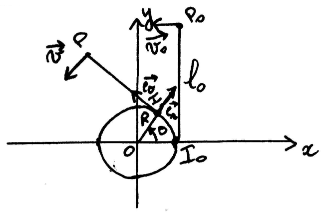
Les forces d'interaction qui s'exercent entre deux points matériels, $M_1$ et $M_2$ sont opposées et ont pour support la droite joignant ces points.

$\vec{F}_{1\to2} + \vec{F}_{2\to1} = \vec{0}$




---

## <u>EXERCICE : Poursuite d'un chat</u>




- Système : chien Pluto assimilé à un point matériel P
- Référentiel d'étude : $R(O;\vec{Ox};\vec{Oy})$.

1] La laine est inextensible, fixée en O et de longueur $\ell_0 = 2\pi R$.

- A l'instant t, la partie enroulée de la laine correspond à l'arc du cercle de rayon R et de centre O compris entre les points $I_0$ et I soit $\widehat{I_0I} = \theta \times R$ avec $\theta$ l'angle $(\vec{Ox};\vec{OI}) = (\vec{OI_0};\vec{OI})$.
- En notant $\ell = IP$ la longueur de la laine non enroulée à l'instant t il vient $\ell_0 = \ell + \widehat{I_0I}$ soit $\ell = \ell_0 - \widehat{I_0I}$ d'où $\boxed{\ell = \ell_0 - \theta \times R.}$

---

2] D'après la relation de Chasles : $\vec{OP} = \vec{OI} + \vec{IP} = R\vec{e_r} + \ell\vec{e_\theta}$ et d'après la relation précédente il vient $\boxed{\vec{OP} = R\vec{e_r} + (\ell_0 - \theta \times R)\vec{e_\theta}}$

---

3] $\vec{v}(P/R) = \vec{v} = \left.\frac{d\vec{OP}}{dt}\right)_R = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} - \dot{\theta}R\vec{e_\theta} - \dot{\theta}(\ell_0 - \theta \times R)\vec{e_r}$ avec $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

soit $\boxed{\vec{v} = -(\ell_0 - \theta \times R)\dot{\theta}\vec{e_r} = -\ell\dot{\theta}\vec{e_r}}$ On retrouve bien le fait que la vitesse de Pluto dans R est perpendiculaire à la laine ($\vec{v} \perp \vec{IP}$ (suivant $\vec{e_\theta}$)).

---

4] D'après l'énoncé Pluto a une vitesse de norme constante égale à $v_0$.

Ainsi $||\vec{v}|| = v_0 = |(\ell_0 - \theta \times R)\dot{\theta}|$. Or $\ell_0 - \theta \times R = \ell$ correspond à une longueur donc c'est une grandeur positive et $\dot{\theta}$ est également positif d'après le sens de la poursuite indiqué dans le texte. Ainsi $\boxed{v_0 = (\ell_0 - \theta \times R)\dot{\theta}}$ et $\vec{v} = -v_0\vec{e_r}$.

5) . En posant $y = l_0 - R\theta$, la relation précédente devient $y \times \frac{\dot{y}}{-R} = v_0$ avec

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d(l_0 - R\theta)}{dt} = -R\frac{d\theta}{dt} = -R\dot{\theta}.$$

L'intégration de la relation $y\dot{y} = -Rv_0$ entre l'instant initial $t=0$ et un instant quelconque $t$ donne : $\int_{y(t=0)}^{y(t)} y\,dy = \int_{t=0}^{t} -Rv_0\,dt$ soit $\frac{1}{2}(y^2 - y_0^2) = -Rv_0 t$ avec $y_0^2 = l_0^2$ d'où

$$y^2 = -2Rv_0 t + l_0^2$$

A la condition $y^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2Rv_0 t + l_0^2 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{t \leq \frac{l_0^2}{2Rv_0}}$ il vient :

$y = \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}$ soit $l_0 - R\theta = \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}$ d'où $\boxed{\theta = \frac{l_0}{R} - \sqrt{\frac{l_0^2}{R^2} - \frac{2v_0 t}{R}}}$

Remarque : $\theta$ est bien une fonction croissante de $t$ ($\dot{\theta} > 0$)

---

6) $d = \|\vec{OP}\| = \| R\vec{e_r} + (l_0 - R\times\theta)\vec{e_\theta} \| = \sqrt{R^2 + (l_0 - R\times\theta)^2}$ ($\vec{e_r}; \vec{e_\theta}$) base orthonormée.

. Or $l_0 = 2\pi R$ d'où $d = \sqrt{R^2 + (2\pi R - R\theta)^2}$ soit $\boxed{d = R\sqrt{1 + (2\pi - \theta)^2}}$

. De même d'après la question précédente $(l_0 - R\theta)^2 = y^2 = -2Rv_0 t + l_0^2$ d'où $d = \sqrt{R^2 + l_0^2 - 2Rv_0 t}$

soit $d = R\sqrt{1 + \frac{l_0^2}{R^2} - \frac{2v_0 t}{R}}$

---

7) $\vec{a}(P/R) = \vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d(v_0\vec{e_r})}{dt}\right)_R = -v_0\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ on retrouve une caractéristique du mouvement uniforme ($\|\vec{v}\| = cste$) : $\vec{a}.\vec{v} = 0$

---

8) La course de Pluto se termine lorsque toute la laine s'est enroulée autour de l'arbre soit $l = IP = 0$. Or $l = l_0 - R\theta = 2\pi R - R\theta = R(2\pi - \theta)$ d'où pour $l = 0$

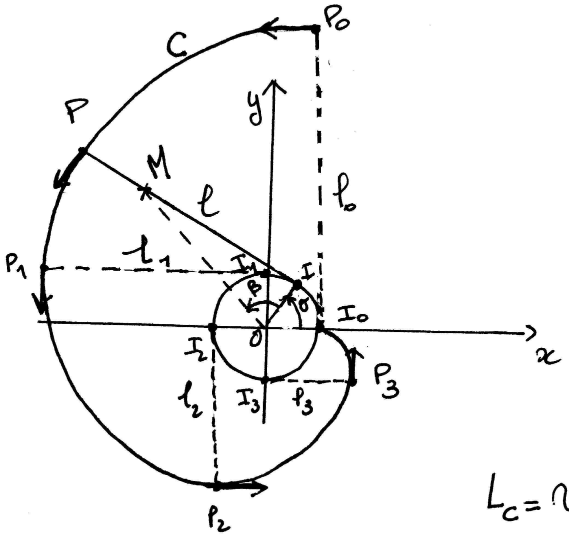
$\boxed{\theta_F = 2\pi}$ : Pluto termine sa course en $I_0$ (point d'attache de la laine).

D'après la question 5) $y = l_0 - R\theta = l = \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}$ d'où pour $l = 0$

$l_0^2 - 2Rv_0 t_F = 0$ soit $\boxed{t_F = \frac{l_0^2}{2Rv_0} = \frac{(2\pi R)^2}{2Rv_0} = \frac{2\pi^2 R}{v_0}}$

Remarque : On retrouve la condition de validité $t \leq t_F$ de la question 5)

9




La vitesse en chaque point est tangente à la trajectoire C et son module est constant et égal à $v_0$.

La longueur de la trajectoire parcourue par Pluto est égale à $\underline{v_0 \times t_F}$ ($t_F$ durée du parcours).

D'après la question précédente il vient :

$L_C = v_0 \times t_F = v_0 \times \dfrac{2\pi^2 R}{v_0}$ soit $\boxed{L_C = 2\pi^2 R.}$

---

10 • Pluto atteindra son écuelle si elle se trouve en un point M du plan $xOy$ dans le domaine $D$ contenant O, limité par la courbe C et le segment $I_0P_0$.

En d'autres termes si $\forall \theta \in [0; 2\pi]$, lorsque $\overrightarrow{IP}$ est dans la direction de $\overrightarrow{IM}$ : $IM \leq \ell$ (voir figure ci dessus pour un point quelconque M).

• Ici l'écuelle est en B tel que $\|\overrightarrow{OB}\| = 2R$ et $(\vec{e_x}; \overrightarrow{OB}) = \dfrac{7\pi}{4}$

On note $(\vec{e_x}; \overrightarrow{OB}) = (\vec{e_x}; \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) = \theta_B + \beta_B$

* $\tan(\beta_B) = \dfrac{IB}{OI} = \dfrac{IB}{R}$ avec $OB^2 = OI^2 + IB^2 = R^2 + IB^2$ soit $IB^2 = OB^2 - R^2$

d'où $IB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow IB = \sqrt{3}R$. Ainsi $\tan(\beta_B) = \sqrt{3}$ soit

$\beta_B = \dfrac{\pi}{3}$. Par conséquent $\theta_B = \dfrac{7\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{17\pi}{12}$

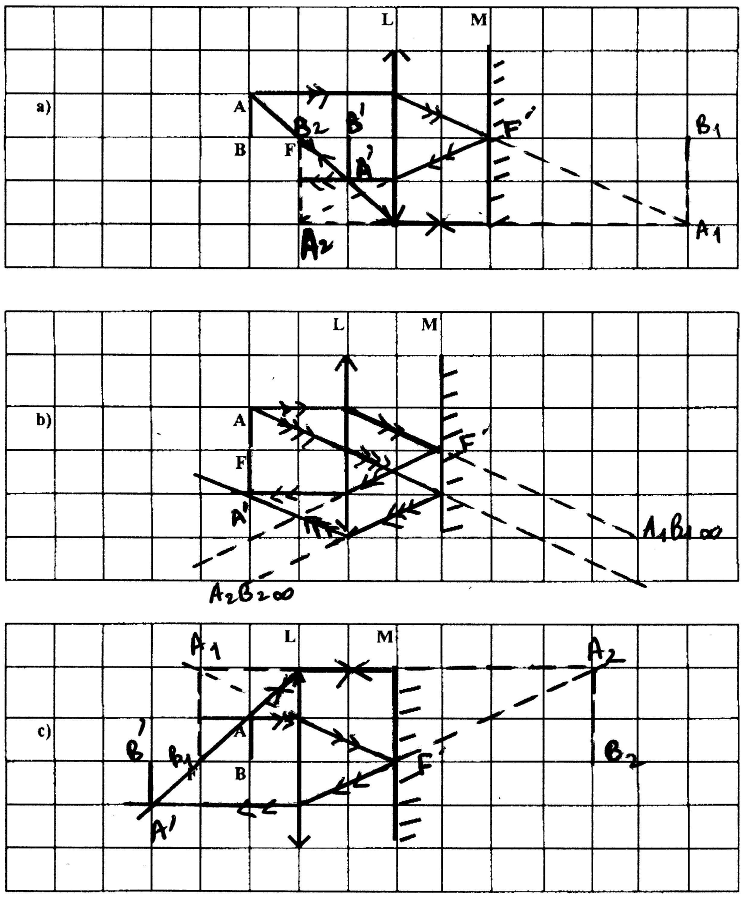
* $IP(\theta_B) = \ell(\theta_B) = \ell_0 - R\theta_B = R(2\pi - \theta_B) = R\left(2\pi - \dfrac{17\pi}{12}\right) = \dfrac{7\pi}{12}R$

d'où $\ell(\theta_B) \sim 1{,}8R$.

$\boxed{\ell(\theta_B) \text{ est supérieur à } IB = \sqrt{3}R \sim 1{,}7R \text{ donc Pluto peut atteindre son écuelle}}$.

---

## I CAS DE L'AUTOCOLLIMATION




• Dans chaque cas, le miroir est placé dans le plan focal image de la lentille.

Cas a) b) c) : justifications constructions

• →> ⊛ un rayon parallèle à l'axe optique avant la lentille émerge en passant par le foyer image F'.

⊛ Ce rayon arrive sur le miroir plan au point F' et est réfléchi symétriquement par rapport à la normale au miroir passant par F' (axe optique)

⊛ Dans le sens de la lumière réfléchie, ce rayon provient du foyer objet F de la lentille (F et F' changent de rôle) et émerge parallèlement à l'axe optique.

• —>— ⊛ un rayon passant par le foyer F émerge parallèlement à l'axe optique.

⊛ un rayon arrivant sous incidence normale sur un miroir plan se réfléchit sur lui-même.

⊛ Dans le sens de la lumière réfléchie, un rayon parallèle à l'axe optique avant la lentille émerge en passant par le foyer F' (F et F' changent de rôle).

• —>>>— ⊛ un rayon passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié.

⊛ Deux rayons parallèles entre eux avant la lentille (dans le sens de la lumière réfléchie) émergent en se croisant dans le plan focal image de la lentille (plan focal image et objet changent de rôle)

I.2] $\boxed{BA \xrightarrow{L} B_1A_1 \xrightarrow{M} B_2A_2 \xrightarrow{L} B'A'}$ ($B, B_1, B_2, B'$ sont sur l'axe optique)

sens de la lumière réfléchie

• On applique pour chaque système de points conjugués la relation de conjugaison du système optique considéré : ⊛ $\boxed{BA \xrightarrow{L} B_1A_1}$ : $\begin{cases} \dfrac{1}{\overline{OB_1}} - \dfrac{1}{\overline{OB}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}} \\ \text{Relation de Descartes} \end{cases}$ soit $\overline{OB_1} = \dfrac{1}{\frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OB}}}$

AN : $\overline{OB_1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{-3}}$ soit $\underline{\underline{\overline{OB_1} = 6}}$

⊛ $\boxed{B_1A_1 \xrightarrow{M} B_2A_2}$ : $\overline{F'B_1} = -\overline{F'B_2}$ ($F'$ étant bien le projeté orthogonal de $B_1$ sur le miroir plan)

soit $\overline{F'O} + \overline{OB_1} = -\overline{F'O} - \overline{OB_2}$ d'où $\overline{OB_2} = -\overline{OB_1} - 2\overline{F'O}$

AN $\overline{OB_2} = -6 - 2\times(-2) \Leftrightarrow \underline{\underline{\overline{OB_2} = -2}}$

⊛ $\boxed{B_2A_2 \xrightarrow{L} B'A'}$ $\dfrac{1}{\overline{OB'}} - \dfrac{1}{\overline{OB_2}} = \dfrac{1}{\overline{OF}}$ soit $\overline{OB'} = \dfrac{1}{\frac{1}{\overline{OF}} + \frac{1}{\overline{OB_2}}}$

lumière réfléchie (F et F' changent de rôle)

AN $\overline{OB'} = \dfrac{1}{\frac{1}{-2} + \frac{1}{-2}}$ soit $\underline{\underline{\overline{OB'} = -1}}$

• Les grandissements vérifient : ⊛ $\dfrac{\overline{B_1A_1}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}} = \dfrac{6}{-3} = -2$ pour la lentille dans le sens de la lumière incidente

$\underline{\underline{\overline{B_1A_1} = -2\,\overline{BA}}}$ avec $A(-3, +1)$ soit $\overline{BA} = 1$

⊛ $\dfrac{\overline{B_2A_2}}{\overline{B_1A_1}} = 1$ pour le miroir plan

$\underline{\underline{\overline{B_2A_2} = \overline{B_1A_1}}}$

⊛ $\dfrac{\overline{B'A'}}{\overline{B_2A_2}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB_2}} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$ pour la lentille dans le sens de la lumière réfléchie

$\underline{\underline{\overline{B'A'} = \dfrac{\overline{B_2A_2}}{2}}}$

En conclusion, les coordonnées des images successives sont : $\boxed{A_1(6, -2) ; A_2(-2, -2) ; A'(-1 ; -1)}$ ce qui correspond bien au schéma obtenu ci-dessus.

I.3. Dans chaque cas, le miroir est placé dans le plan focal image de la lentille. Ainsi, le rayon incident passant par A et parallèle à l'axe sort de la lentille en passant par le foyer image F' de la lentille (situé sur le miroir). Il est donc réfléchi symétriquement par rapport à l'axe optique et ressort de la lentille parallèlement à cet axe à une distance égale à la hauteur de l'objet. Le grandissement transversal est donc égal à $-1$ dans chacun des cas étudié.

I.4. Dans le cas (b), l'objet est placé dans le plan focal objet de la lentille, tous les rayons incidents passant par A sortent donc de la lentille parallèles entre eux. Quelle que soit la position du miroir le long de l'axe optique, ils sont réfléchis symétriquement et repartent parallèlement entre eux. Autrement dit, l'image $A_1$ est à l'infini donc l'image $A_2$ l'est aussi. Alors leur image par la lentille, dans le sens de la lumière réfléchie, est dans le plan focal image, symétrique de A par rapport à l'axe optique (grandissement égal à -1).

I.5. Si l'on incline le miroir, le rayon passant par B et parallèle à l'axe optique traverse la lentille sans être dévié mais il est réfléchi par le miroir dans une direction qui n'est plus l'axe optique. La position de B' n'est donc plus sur l'axe optique. La condition d'aplanétisme entraîne que B' est dans le plan focal objet de la lentille qui est le plan où se trouve l'image lorsque le miroir n'est pas incliné. Si l'on incline le miroir, l'image est donc translatée dans son plan, vers le haut ou vers le bas. Comme certains rayons ne traversent plus la lentille, l'image est moins lumineuse. Elle peut disparaître si la rotation du miroir est trop grande.

I.6. Dans le cas (b), l'objet est placé dans le plan focal objet de la lentille. Ainsi tous les rayons passant par A sortent de la lentille parallèlement entre eux : **l'image $A_1$ est donc à l'infini**. L'ensemble objet AB et lentille L forme donc un collimateur.

I.7. Par la **méthode d'autocollimation**, on déplace la lentille, associée à un miroir plan, par rapport à l'objet jusqu'à ce que l'image inversée de celui-ci soit nette dans le plan de l'objet et de même taille. Alors la distance objet-lentille est égale à la distance focale.

D'autres méthodes de focométrie sont la méthode de Bessel ou la méthode de Silbermann (on cherche la position de l'ensemble {objet, lentille (sans miroir), écran} telle que l'image nette sur l'écran ait un grandissement de $-1$. Les distances objet-lentille et lentille-écran sont alors égales à 2f')