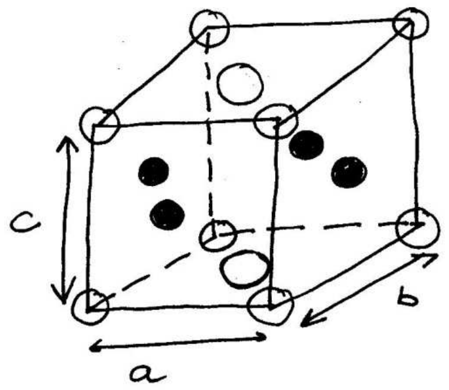
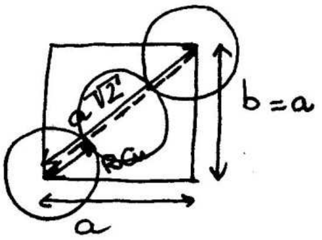
TD Structure cristalline - Exercice 3 : Alliage cuivre-or



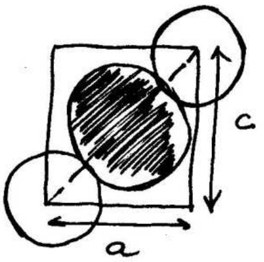
$\begin{cases} a = b \neq c \\ \text{angles égaux à } \frac{\pi}{2} \end{cases}$

1] La tangence des atomes se fait suivant les diagonales des faces :



. $a\sqrt{2} = 4R_{Cu} \Rightarrow \boxed{a = 2\sqrt{2}R_{Cu}}$

. AN : $a = 362\,pm$



Soit ℓ la longueur de la diagonale : $\ell = \sqrt{a^2+c^2}$

$\ell = 2R_{Cu} + 2R_{Au}$

D'où $4(R_{Cu}+R_{Au})^2 = a^2+c^2 \Rightarrow c^2 = 4(R_{Cu}^2 + R_{Au}^2 + 2R_{Cu}R_{Au}) - 8R_{Cu}^2$

$\Rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{R_{Au}^2 - R_{Cu}^2 + 2R_{Cu}R_{Au}}}$

AN : $c = 406\,pm$

2] 4 atomes d'or au centre des faces ; 1 face est partagée par 2 mailles $\Rightarrow$ $4 \times \frac{1}{2}$ = 2 atomes d'or par maille.

8 atomes de cuivre aux sommets du parallélépipède ; 1 sommet est partagé par 8 mailles

2 atomes de cuivre au centre des faces ; 1 face est partagée par 2 mailles

$\Rightarrow$ $8 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{2}$ = 2 atomes de cuivre par maille

3] fraction massique de l'or dans l'alliage : $\frac{m_{Au}}{m_{totale}} = \frac{m_{Au}}{m_{Cu}+m_{Au}}$ (dans 1 maille)

Comme il y autant d'atomes de cuivre que d'or par maille alors il y a autant de moles de cuivre et d'or dans une masse donnée de cet alliage.

Ainsi la fraction massique de l'or peut s'écrire : $\boxed{\frac{M_{Au}}{M_{Au}+M_{Cu}}}$ AN : 75%

Dans 24 g d'alliage il y a $24 \times 0{,}75 = 18$ g d'or : on dit que l'alliage est à 18 carats.

4] $\rho = \frac{m_{maille}}{V_{maille}} = \frac{\frac{2[M_{Cu}+M_{Au}]}{N_A}}{a^2 c}$ AN $\rho = 16.10^3\ kg.m^{-3}$

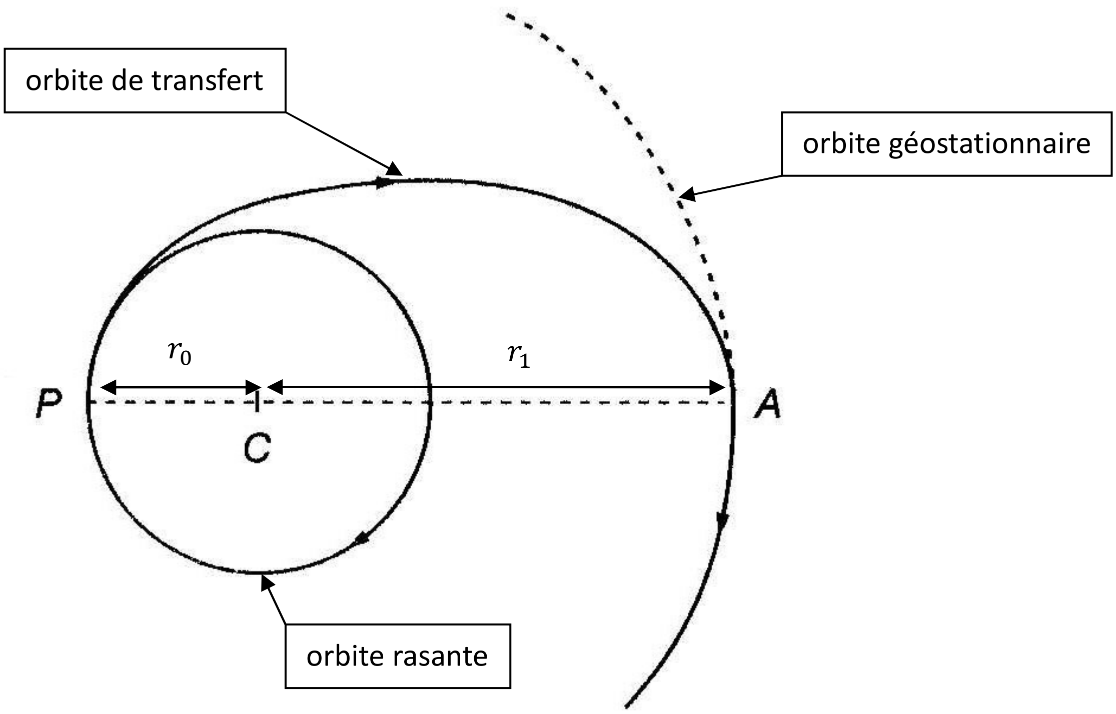
TD Forces centrales conservatives - Exercice 3 : Changement d'orbite – Ellipse de transfert

Voir Animation :
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Planetes/transfert.html

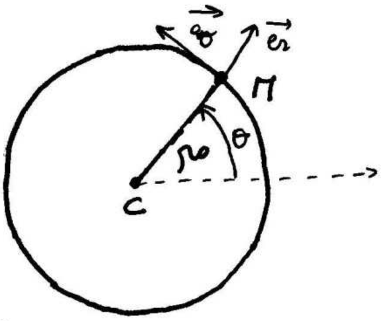
Système : satellite assimilé à un point matériel M de masse m.

Référentiel d'étude : géocentrique (centre C, axes dirigés vers trois étoiles fixes) considéré comme galiléen.

Bilan des forces : Interaction gravitationnelle $\vec{F} = -\frac{GmM_T}{CM^3}\overrightarrow{CM}$ où M_T est la masse de la Terre.



$\boxed{1}$ Le satellite décrit une trajectoire circulaire de rayon r_0.



- Dans la base polaire il vient :

$$\begin{cases} \vec{CM} = r_0 \vec{e_r} \\ \vec{v}(M) = r_0 \dot{\theta} \vec{e_\theta} \\ \vec{a}(M) = r_0 \ddot{\theta} \vec{e_\theta} - r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e_r} \end{cases}$$

- Le principe fondamental de la dynamique appliqué au satellite s'écrit :

$$m\vec{a} = -\frac{GM_T m}{r_0^2}\vec{e_r} \qquad \text{avec} \quad \frac{GM_T}{r_0^2} = g_0 \ (1) \quad (r_0 \rightarrow \text{rayon de la terre})$$

- On projette cette relation sur $\vec{e_\theta}$: $r_0 \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \text{constante} = \omega_0}$

Ainsi $\vec{v}(M) = r_0 \omega_0 \vec{e_\theta} = v_0 \vec{e_\theta}$ avec $\boxed{v_0 = r_0 \omega_0}$ constante du mouvement.

Il s'agit donc d'un mouvement circulaire uniforme.

- On projette sur $\vec{e_r}$: $r_0 \dot{\theta}^2 = r_0 \omega_0^2 = \frac{GM_T}{r_0^2} \overset{(1)}{=} \frac{r_0^2 g_0}{r_0^2} = g_0 \ (2)$

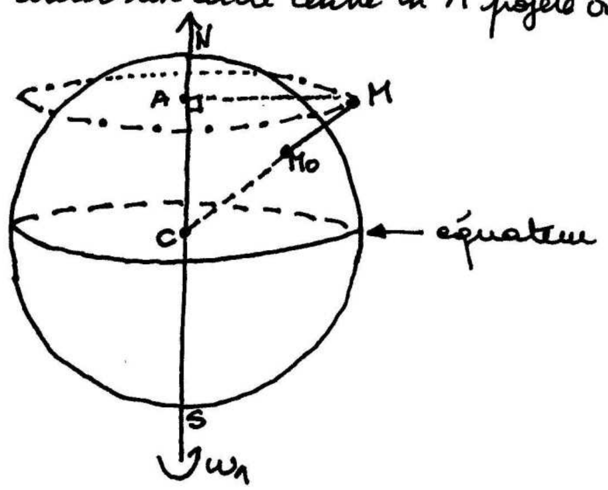
Or $\omega_0^2 = \frac{v_0^2}{r_0^2}$ d'où $r_0\left(\frac{v_0^2}{r_0^2}\right) = g_0$ soit $\boxed{v_0 = \sqrt{g_0 r_0}}$ 1ère vitesse cosmique

De plus $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ soit $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \underset{(2)}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g_0}{r_0}}}$ d'où $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r_0}{g_0}}}$

Applications numériques ($r_0 = 6400$ km, $g_0 = 9{,}8$ m.s^{-2}) : $v_0 = 7{,}9$ km.s^{-1}

$T_0 = 1$ h 25 min

[2] a) • Supposons que le satellite soit immobile au dessus du point M_0 du sol. Du fait de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles de période T_1 ($\sim 24h$), sa trajectoire serait un cercle centré en A projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.



• Comme ce satellite n'est soumis qu'à la force d'attraction gravitationnelle qui est une FORCE CENTRALE, son moment cinétique par rapport au centre de force C (centre de la Terre) est constant. Ceci a pour conséquence que le mouvement de M est contenu dans un plan passant par C.

• Afin de confondre A et C, le satellite géostationnaire a obligatoirement sa trajectoire dans le plan équatorial.

---

b] Je reprends l'expression trouvée pour l'orbite rasante (projection sur $\vec{e_r}$) :

• (2) $r_1 \omega_1^2 = \frac{GM_T}{r_1^2} = \frac{r_0^2 g_0}{r_1^2} \Rightarrow r_1^3 = \frac{r_0^2 g_0}{\omega_1^2} = \frac{r_0^2 g_0}{\frac{4\pi^2}{T_1^2}} = \frac{T_1^2 r_0^2 g_0}{4\pi^2}$

$$\Rightarrow \boxed{r_1 = \left(\frac{g_0 r_0^2 T_1^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$$ ($\sim 3^{ème}$ loi de Képler)

• (2) $r_1 \omega_1^2 = \frac{r_0^2 g_0}{r_1^2} \Rightarrow r_1 \frac{v_1^2}{r_1^2} = \frac{r_0^2 g_0}{r_1^2} \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{r_0^2 g_0}{r_1}}}$

Applications numériques : $r_1 = 4,2 \times 10^4$ km ($T_1 = 24h$)

$v_1 = 3,1$ km.s^{-1}

3 a] • Sur sa trajectoire elliptique, on admet que l'énergie mécanique du satellite s'écrit $\boxed{E_m = -\dfrac{GM_T m}{2a}}$ où a est le demi-grand axe de l'ellipse. D'après le dessin $2a = r_0 + r_1 = CP + CA$

• L'énergie mécanique du satellite s'écrit de manière plus générale comme suit : $\boxed{E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GM_T m}{r}}$ où $r = CM$ (M désigne le satellite)

En égalant ces deux expressions de Em il vient :

$$-\frac{GM_T m}{r_0+r_1} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r} \xrightarrow[(GM_T = g_0 r_0^2)]{} -\frac{g_0 r_0^2}{r_0+r_1} = \frac{v^2}{2} - \frac{g_0 r_0^2}{r}$$

$$\Rightarrow v^2 = 2g_0 r_0^2 \underbrace{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0+r_1}\right)}_{>0 \text{ car } r_{max} = r_1} \text{ soit } \boxed{v = \sqrt{2g_0 r_0^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0+r_1}\right)}}$$

• Pour $r = CP = r_0$ $\quad v_0' = \sqrt{2g_0 r_0^2\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{r_0+r_1}\right)}$ soit $\boxed{v_0' = \sqrt{2g_0 \dfrac{r_0 r_1}{r_0+r_1}}}$

AN $\underline{v_0' = 10{,}4 \text{ km.s}^{-1}}$

Pour $r = CA = r_1$ $\quad v_1' = \sqrt{2g_0 r_0^2\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_1+r_0}\right)}$ soit $\boxed{v_1' = \sqrt{\dfrac{2g_0 r_0^3}{r_1(r_0+r_1)}}}$

AN : $\underline{v_1' = 1{,}6 \text{ km.s}^{-1}}$

Remarque : M est soumis à une force centrale de centre de force C. Ainsi le moment cinétique de M par rapport à C se conserve d'où :

$$\vec{L}_C(M) = \vec{CP} \wedge m\vec{v_0'} = \vec{CA} \wedge m\vec{v_1'} \quad \text{avec} \begin{cases} \vec{CP} \perp \vec{v_0'} \\ \vec{CA} \perp \vec{v_1'} \end{cases} \text{sur l'ellipse.}$$

d'où $\boxed{r_0 v_0' = r_1 v_1'}$. C'est bien ce que l'on constate aux approximations de calculs près.

b] La durée du transfert τ correspond à la demi période du mouvement elliptique qui vérifie la troisième loi de Kepler : $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \frac{4\pi^2}{g_0 r_0^2}}$

$$\tau = \frac{T}{2} \quad \text{avec} \quad T = \left(\frac{4\pi^2}{g_0 r_0^2}\left(\frac{r_0+r_1}{2}\right)^3\right)^{1/2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tau = \frac{\pi}{2r_0}\sqrt{\frac{(r_0+r_1)^3}{2g_0}}}$$

AN : $\tau = 5\text{h}\,11\text{min}$

4] a) $W_0 = Em_{final} - Em_{initial} = Em_{orbite\ rasante} - Em_{Terre}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{Théorème de l'énergie mécanique} \\ \Delta Em = W_{non conservatif}\end{array}\right\}$

avec $\begin{cases} Em_{orbite\ rasante} = \frac{1}{2}m v_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} \\ Em_{Terre} = \frac{1}{2}m v_T^2 - \frac{GM_T m}{r_0} \end{cases}$

⚠ le référentiel choisi est le référentiel géocentrique ($\neq$ référentiel terrestre dans lequel le satellite est fixe sur sa base de lancement). Ainsi v_T est la vitesse d'entrainement communiquée au satellite due à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. $v_T = r_0 . \omega_T$ avec $\omega_T = \frac{2\pi}{T_1}$ ($T_1 = 24h$). (en supposant la base de lancement au niveau de l'équateur). AN: $v_T = 4,7.10^{-1}\,km.s^{-1}$

Par conséquent $v_0^2 > 100\, v_T^2$ et on négligera v_T^2 devant v_0^2.

Ainsi $\boxed{W_0 = \frac{1}{2}m v_0^2 = \frac{m}{2} g_0 r_0}$

4) b)

$$W_1 = Em_{\substack{\text{orbite}\\\text{transfert}}} - Em_{\substack{\text{orbite}\\\text{rasante}}} = \frac{-GM_Tm}{r_0+r_1} - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_Tm}{r_0}\right)$$

$$= \frac{GM_Tm}{r_0} \times \left[1 - \frac{1}{1+\frac{r_1}{r_0}}\right] - W_0$$

$GM_T = g_0r_0^2$

$$= \frac{g_0r_0^2m}{r_0}\left[1 - \frac{1}{1+\rho}\right] - W_0$$

$$= 2W_0\left[\frac{\rho}{1+\rho}\right] - W_0$$

Ainsi $W_1 = W_0\left(\frac{2\rho}{1+\rho} - 1\right)$ soit $\boxed{W_1 = W_0\,\frac{\rho-1}{\rho+1}}$

$$W_2 = Em_{\substack{\text{orbite}\\\text{géo}}} - Em_{\substack{\text{orbite}\\\text{transfert}}} = \left(\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_Tm}{r_1}\right) - \left(-\frac{GM_Tm}{r_0+r_1}\right)$$

- question 2b) $v_1^2 = \frac{r_0^2g_0}{r_1}$
- $GM_T = g_0r_0^2$

$$= \left(\frac{mr_0^2g_0}{2r_1} - \frac{mg_0r_0^2}{r_1}\right) + \frac{mg_0r_0^2}{r_0+r_1}$$

$$= mg_0r_0\left[\frac{1}{1+\frac{r_1}{r_0}} + \frac{1}{2\frac{r_1}{r_0}} - \frac{1}{\frac{r_1}{r_0}}\right]$$

$$= 2W_0\left[\frac{1}{1+\rho} + \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{\rho}\right]$$

$$= 2W_0\left[\frac{1}{1+\rho} - \frac{1}{2\rho}\right]$$

$$= 2W_0\left[\frac{(\rho-1)}{2\rho(1+\rho)}\right]$$

Ainsi $\boxed{W_2 = W_0\,\frac{\rho-1}{\rho(\rho+1)}}$

Remarque : On peut obtenir l'expression de W_1 et W_2 à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

(W_1) $\Delta E_c = E_{c\,\text{final}} - E_{c\,\text{initial}} = W_1 + W_{\text{force conservative}}$ → force gravitationnelle
Elle ne travaille pas car le satellite garde la même altitude $r = r_0$.

$$\Rightarrow \Delta E_c = W_1 = \frac{1}{2}m\left(v_0'^2 - v_0^2\right)$$

3]a) $v_0'^2 = 2g_0 \frac{r_0 r_1}{r_0 + r_1}$

$$\Rightarrow W_1 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2g_0 r_0 r_1}{r_0 + r_1} - g_0 r_0\right)$$

$$= \frac{1}{2}m g_0 r_0 \left(\frac{2r_1}{r_0 + r_1} - 1\right)$$

$$= W_0\left(\frac{2\rho}{1+\rho} - 1\right)$$

Soit $\boxed{W_1 = W_0\left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\right)}$

(W_2) $\Delta E_c = W_2 = \frac{1}{2}m\left(v_1'^2 - v_1^2\right)$ (altitude constante $r = r_1$)

3]a) $v_1'^2 = \frac{2g_0 r_0^3}{r_1(r_0 + r_1)}$

$$\Rightarrow W_2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2g_0 r_0^3}{r_1(r_0+r_1)} - \frac{g_0 r_0^2}{r_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m g_0 r_0\left(\frac{2r_0^2}{r_1(r_0+r_1)} - \frac{r_0}{r_1}\right)$$

$$= W_0\left(\frac{2}{\rho(1+\rho)} - \frac{1}{\rho}\right)$$

Ainsi $\boxed{W_2 = W_0\left(\frac{\rho - 1}{\rho(1+\rho)}\right)}$